



unioeste

Universidade Estadual do Oeste do Paraná

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS

COLEGIADO DE MATEMÁTICA

LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

UNIOESTE - CAMPUS DE CASCAVEL

ANA CECÍLIA DOS SANTOS MACIEL

FELIPE CESAR MULLER RIO BRANCO

LETÍCIA GABRYELA CORDEIRO LANG

RELATÓRIO DA DISCIPLINA DE METODOLOGIA E PRÁTICA DE

ENSINO DE MATEMÁTICA:

ESTÁGIO SUPERVISIONADO I

PROMAT

CASCAVEL
2025

ANA CECÍLIA DOS SANTOS MACIEL
FELIPE CESAR MULLER RIO BRANCO
LETÍCIA GABRYELA CORDEIRO LANG

**RELATÓRIO DA DISCIPLINA DE METODOLOGIA EPRÁTICA DE ENSINO
DE MATEMÁTICA:
ESTÁGIO SUPERVISIONADO I
PROMAT**

Relatório apresentado como requisito parcial da
disciplina para aprovação. Orientadora: Prof. Arleni
Elise Sella Langer.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO.....	6
FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA (artigo)	8
INTRODUÇÃO.....	8
DESENVOLVIMENTO.....	9
CONCLUSÃO.....	14
ENCONTROS	15
1.1 Encontro I – 10/05/2025	15
1.1.1 Plano de Aula.....	15
1.1.2 Relatório	25
1.1.3 Materiais utilizados.....	27
1.2 Encontro II – 17/05/2025.....	34
1.2.1 Plano de Aula.....	34
1.2.2 Relatório	43
1.2.3 Materiais utilizados.....	45
1.3 Encontro 3 – 24/05/2025	47
1.3.1 Plano de Aula.....	47
1.3.2 Relatório	54
1.3.3 Materiais utilizados.....	56
1.4 Encontro 4 – 31/05/2025	63
1.4.1 Plano de Aula.....	63
1.4.2 Relatório	67
1.4.3 Materiais utilizados.....	68
1.5 Encontro 5 – 07/06/2025	77
1.5.1 Plano de Aula.....	77
1.5.2 Relatório	88
1.5.3 Materiais utilizados.....	89
1.6 Encontro 6 – 14/06/2025	97
1.6.1 Plano de Aula.....	97
1.6.2 Relatório	103
1.6.3 Materiais utilizados.....	104

1.7	Encontro 7 – 21/06/2025	115
1.7.1	Plano de Aula.....	115
1.7.2	Relatório	128
1.7.3	Materiais utilizados.....	129
1.8	Encontro 8 – 28/06/2025	135
1.8.1	Plano de Aula.....	135
1.8.2	Relatório	142
1.8.3	Materiais utilizados.....	142
1.9	Encontro 9 – 05/07/2025	148
1.9.1	Plano de Aula.....	148
1.9.2	Relatório	156
1.9.3	Materiais utilizados.....	158
1.10	Encontro 10 – 12/07/2025	165
1.10.1	Plano de Aula.....	165
1.10.2	Relatório	167
1.10.3	Materiais utilizados.....	168
CONSIDERAÇÕES FINAIS		171
REFERÊNCIAS		171

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Cronograma	6
Tabela 2 – Atividade para formalização do conteúdo dos conjuntos numéricos	16
Tabela 3 – Exemplo resolvido da atividade de formalização	17
Tabela 4 – Questões de V ou F para fixação do conteúdo	19
Tabela 5 – Materiais e regras do dominó	48
Tabela 6 – Atividade para formalização do conteúdo dos conjuntos numéricos	50
Tabela 7 – Questões sobre triângulos	82
Tabela 8 – Tabela de Medição e Cálculo da Razão entre Circunferência e Diâmetro	101
Tabela 9 – Tabela da relação das bolinhas com mL.....	158

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Representação do conjunto dos números reais por meio do Diagrama de Venn	19
Figura 2 – Levando o vértice A até o B.....	35
Figura 3 – Outra forma de representar o quadrado.....	36
Figura 4 – Dobradura para encontrar 13	37
Figura 5 – Dobradura para encontrar 15	37
Figura 6 – Origamis produzidos pelos alunos	44
Figura 7 – Sala de aula	44
Figura 8 – Folha A3 demonstrando as dobraduras a serem realizadas.....	44
Figura 9 – <i>Slides</i> 17/05/2025	48
Figura 10 – <i>Slides</i> de 24/05/2025	65
Figura 11 – Triângulos retângulos.....	84
Figura 12 – Marcação da altura	85
Figura 13 – Forma recortada	85
Figura 14 – Lados nomeados.....	86
Figura 15 – Lados nomeados da Figura Recortada	86
Figura 16 – Triângulos semelhantes	87
Figura 17 – Teorema de Pitágoras	88
Figura 18 – Demonstração visual do Teorema de Pitágoras	89
Figura 19 – Demonstração por semelhança.....	89
Figura 20 – <i>Slides</i> de 07/06/2025	99
Figura 21 – Material sobre a área da circunferência	103
Figura 22 – Círculo Máximo e Círculo Menor.....	104
Figura 23 – <i>Slides</i> de 14/06/2025	116
Figura 24 – <i>Slides</i> de 14/06/2025	117
Figura 25 – <i>Slides</i> de 14/06/2025	118
Figura 26 – Possibilidades da construção do cilindro	121
Figura 27 – Planificação do cilindro.....	122
Figura 28 – Construção do cone, passo 1	123
Figura 29 – Construção do cone, passo 2	124
Figura 30 – Construção do cone, passo 2	124
Figura 31 – Construção do cone, passo 3	125
Figura 32 – Elemento do cone	125
Figura 33 – Comparação cilindro e cone.....	126
Figura 34 – Cone	127
Figura 35 – Poliedros convexos.....	128
Figura 36 – Poliedros não-convexos	128
Figura 37 – Pirâmides: nomenclatura e algumas bases	128
Figura 38 – Poliedros regulares de Platão	129
Figura 39 – Atividade com massinha elaboradas por alunos	130
Figura 40 – <i>Slides</i> de 21/06/25	141
Figura 41 – <i>Slides</i> de 21/06/25	142
Figura 42 – <i>Slides</i> de 21/06/25	143

Figura 43 – <i>Slides</i> de 21/06/25	144
Figura 44 – Cartela de Bingo.....	150
Figura 45 – <i>Slides</i> 28/06/2025	159
Figura 46 – <i>Slides</i> 28/06/2025	160
Figura 47 – <i>Slides</i> 28/06/2025	161
Figura 48 – <i>Slides</i> 28/06/2025	162
Figura 49 – Eixos ortogonais com origem.....	163
Figura 50 – Eixos ortogonais com quadrantes.....	164
Figura 51 – Eixos ortogonais com ponto P qualquer.....	164
Figura 52 – Materiais da dinâmica: proveta e bolinhas de gude	165
Figura 53 – Relação domínio de A em B	168
Figura 54 – Relação domínio de A em B	169
Figura 55 – <i>Slides</i> 05/07/2025	181

INTRODUÇÃO

Este relatório tem como objetivo descrever as atividades desenvolvidas na disciplina de Metodologia e Prática de Ensino de Matemática - Estágio Supervisionado I, realizadas no âmbito do Promat (Programa de Acesso e de Permanência de Estudantes da Rede Pública de Ensino em Universidades Públicas: Um enfoque à Área de Matemática). O documento foi elaborado pelos acadêmicos Ana Cecília dos Santos Maciel, Felipe Cesar Muller Rio Branco e Letícia Gabryela Cordeiro Lang, do 3º ano do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual do Oeste do Paraná (Unioeste) - Campus Cascavel, sob a orientação da professora Arleni Elise Sella Langer.

Neste relatório, será apresentada uma análise geral do Promat, bem como a vivência dos estagiários no papel de professores durante as aulas ministradas. Serão expostos os acontecimentos relevantes, os aprendizados adquiridos e os materiais utilizados nos encontros, incluindo planos de aula, listas de exercícios e recursos didáticos.

As atividades do Promat foram realizadas nas dependências da Unioeste e tiveram como objetivo oferecer aos alunos da rede pública, que almejam ingressar no ensino superior, aulas de matemática focadas nos conteúdos recorrentes em vestibulares e no Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM). O programa consistiu em 10 encontros, com conteúdos predefinidos e predominantemente abordados no ensino fundamental, conforme o seguinte cronograma:

Tabela 1 – Cronograma

Encontro	Data	Conteúdos
1	10/05/2025	Números (conjuntos e operações)
2	17/05/2025	Frações, números decimais e porcentagem
3	24/05/2025	Proporcionalidade, razão e igualdade
4	31/05/2025	Polígonos
5	07/06/2025	Triângulos
6	14/06/2025	Circunferência, círculo e esfera
7	21/06/2025	Poliedros: área de pirâmides, cilindros e cones
8	28/06/2025	Polinômios e equações do 1º grau
9	05/07/2025	Função do primeiro grau
10	12/07/2025	Gincana

Fonte: elaborada pelos autores do presente documento

Este relatório foi dividido em três partes, começando pela descrição do Promat, dando sua razão de existir, para quem é destinado esse projeto, qual a duração e sua função. Em uma segunda parte, há uma fundamentação teórica relacionada à prática aplicada no período do Promat, elencando pontos positivos na prática de ensino utilizando de materiais manipuláveis. Na terceira e última parte busca-se não apenas documentar o percurso, mas também avaliar os resultados obtidos, identificando tanto as conquistas quanto os aspectos que demandam aprimoramento em futuras intervenções pedagógicas.

FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

INTRODUÇÃO

Partindo do ponto de vista da Resolução de Problemas, este trabalho tem o objetivo de evidenciar o seu uso e das atividades propostas por meio de experimentações durante a disciplina de Metodologia e Prática de Ensino de Matemática – Estágio Supervisionado I.

Durante a primeira aula aplicada aos estudantes, dos quais a maioria frequenta ou frequentou escola pública, percebemos que nosso público era diversificado, mas todos apresentavam dificuldades bem semelhantes. Nesse momento, percebemos que nosso trabalho não seria fácil. Neste tópico, encontramos um grande aspecto a ser trabalhado durante nossas atividades acadêmicas: a defasagem de conhecimento, pois claramente já estava presente há muitos anos.

Pouco antes do Promat, estávamos pesquisando e investigando os comportamentos e as possibilidades que a Resolução de Problemas apresenta. Tomamos as ideias encontradas como norte para iniciarmos nossas atividades acadêmicas.

É evidente que a Resolução de Problemas chama atenção há muito tempo, e estudos como o produzido por Proença (2021) destacam que vários autores apresentam opiniões diferentes sobre a Resolução de Problemas no ensino de elementos matemáticos, mas, em geral, todos destacam ideias semelhantes. Analisamos o posicionamento de autores com diversas perspectivas, que se relacionam em alguns pontos. Para o planejamento de nossas aulas e deste artigo, três autores se destacaram: Polya (1995), Alevatto e Onuchic (2011), por terem pontos de vista semelhantes, que evidenciam o poder da Resolução de Problemas ao abrir portas para a liberdade dos alunos explorarem temas que, muitas vezes, são expostos de forma engessada.

DESENVOLVIMENTO

A Educação Matemática, como área de pesquisa, é relativamente recente e apresenta diversas tendências metodológicas que orientam práticas de ensino e investigação (Fiorentini; Lorenzato, 2007). Entre essas tendências, destaca-se a Resolução de Problemas, que tem ganhado relevância como abordagem didática e investigativa.

Segundo Alevatto e Onuchic (2011), na Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática por meio da Resolução de Problemas, o problema assume o papel de ponto de partida para o processo de ensino. A partir de sua resolução em sala de aula, os alunos são levados a estabelecer conexões entre diferentes áreas da Matemática, o que favorece a construção de novos conceitos.

Essa metodologia incentiva os estudantes a explorarem diferentes estratégias de resolução, promovendo a articulação entre conteúdos matemáticos e o desenvolvimento de habilidades como o raciocínio lógico, a análise crítica e a argumentação.

Segundo English, Lesh e Fennewald (2008), citados por Onuchic (2013), o uso da Resolução de Problemas como estratégia para a construção e compreensão de conteúdos promove novas perspectivas sobre o desenvolvimento das habilidades envolvidas nesse processo. Essa abordagem esteve presente em diversos encontros realizados no Promat, nos quais buscamos não apenas transmitir conteúdos matemáticos, mas também criar situações que favorecessem o aprimoramento da capacidade de resolver problemas.

No primeiro encontro do Promat, realizamos uma atividade voltada à formação da ideia de conjuntos, com base em uma proposta adaptada da dissertação de mestrado de Silva (2019), intitulada “Estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental exploram situações com os números irracionais π e φ ”. Na dissertação, o autor sugere iniciar uma atividade a partir da palavra “carro”, incentivando os alunos a elencarem palavras associadas a esse termo, o que permite a posterior organização em subconjuntos. Inspirados nessa ideia, utilizamos a palavra “países” como ponto de partida, de modo a explorar os conjuntos de forma mais visual e geográfica. A partir dessa proposta, os alunos puderam sugerir subconjuntos como continentes, idiomas de origem latina, países de língua inglesa, entre outros, conforme registrado no relatório do Encontro 1.

A construção do conceito de conjuntos ocorreu, em grande parte, graças à liberdade dada aos estudantes para participarem da atividade. Por se tratar de um tema acessível, todos conseguiram contribuir com exemplos de países, o que favoreceu o sentimento de pertencimento ao processo de aprendizagem. Esse protagonismo está alinhado aos princípios da metodologia de Resolução de Problemas, na qual o aluno assume um papel ativo na construção do próprio conhecimento.

Na segunda parte da atividade, propusemos que os alunos, ao invés de citar países, sugerissem números, que seriam elementos dos novos conjuntos. Embora a elaboração dos elementos tenha sido simples, a formação dos conjuntos numéricos demonstrou ser mais desafiadora no que se refere à classificação dos números irracionais. Pommer (2016) estabelece um paralelo com a história dos números irracionais, explicando que muitos deles inicialmente surgiram no contexto dos números racionais, como solução a problemas cotidianos, mas, à medida que foram sendo analisados e aprofundados, passaram a ser classificados como irracionais.

Considerando a disciplina de Metodologia e Prática de Ensino de Matemática – Estágio Supervisionado I, voltada aos conteúdos do Ensino Fundamental II (Anos Finais do Ensino Fundamental), é pertinente refletir sobre a forma como os números irracionais são abordados nesse nível de ensino. Conforme destaca Boff (2006), a apresentação desses números nos livros didáticos aprovados pelo MEC¹ é, em geral, limitada e pouco aprofundada.

Salientamos aqui que, em geral, a abordagem de números irracionais/reais de alguns livros didáticos aprovados pelo MEC e destinados às 7ª e 8ª séries do Ensino Fundamental envolve:

- na 7ª série, apenas uma apresentação do conceito de número irracional, nem sempre completa, e a apresentação dos números $\sqrt{2}$ e π como exemplos, este último ligado principalmente ao cálculo do comprimento de uma circunferência ou à área de um círculo. Na sequência, π vira o racional 3,14 sem muitos comentários;
- na 8ª série, quase que exclusivamente o cálculo com radicais, que pouco contribui para que os alunos aprimorem o conceito de número irracional/real e o significado de sua quantidade. (Boff, 2006, p. 8)

Essa limitação foi confirmada na prática durante os encontros realizados no Promat. Em uma das aulas, abordamos o conceito de razão áurea e constatamos que a maioria dos alunos não conhecia esse número. Aqueles que já haviam tido algum contato prévio o identificavam apenas como um número, sem compreensão sobre sua origem ou aplicações.

¹ Ministério da Educação.

Fatos como esse, ocorreram durante diversos encontros, dando mais visibilidade a atual problemática sobre a defasagem de conhecimento entre os alunos, principalmente os que fazem parte da rede pública de ensino. Claramente existe uma lacuna no ensino a ser preenchida, pois metodologias ativas como a Resolução de Problemas, vem sendo incentivada pela Secretaria da Educação do Paraná – SEED PR evidente no Programa Mais Aprendizagem (PMA) instituído pela Instrução Normativa n.º 006/2025 – Deduc/Seed, mas com a proposta de inovar o ensino, “otimizar o aprendizado dos conteúdos curriculares, fortalecer a qualidade do ensino e aprimorar os índices que mantêm a educação do Estado no topo do ranking educacional brasileiro”, como mostrado anteriormente, metodologias diferentes da tradicional, existem e são investigadas há muito tempo, como no caso da Resolução de Problemas, o estado do Paraná só apresentou essa iniciativa por perceber a nitidez da defasagem e precisar reformular o ensino a favor dos dados estatísticos, e não com o intuito de valorizar a aprendizagem.

Durante nossa prática de estágio, optamos trabalhar esta defasagem de forma prática menos expositiva, Lorenzato (2006) citado por Rodrigues e Gazire (2012), destaca que materiais manipulativos são definidos como “[...] qualquer instrumento útil ao processo de ensino e aprendizagem” os quais podem desempenhar várias funções, dependendo do objetivo a que se prestam, em nosso caso, instigamos os alunos a ficarem atentos e curiosos com as possibilidades de resultado, sem estimular o preconceito com tema estudado. Também devemos considerar o papel do professor, afinal essa prática estimula o não protagonismo do docente, proporcionando mais liberdade ao aluno, assim como Fey e Jelinek (2021) afirmam que o papel do professor é fundamental, no qual ele deve propor questionamentos que levem o aluno a pensar, questionar, duvidar e experimentar, para que compreendam os conceitos estudados, aspectos que são essenciais para a utilização desses materiais.

Em uma das dinâmicas aplicadas com o intuito de promovermos o aprendizado das ideias de função afim com material manipulativo, utilizamos provetas e bolas de gude para a reprodução de uma atividade proposta por Souza et al. (2023), causando grande interesse nos estudantes e instigando-os. Durante a execução da tarefa, foram realizadas indagações fundamentadas na abordagem de Polya (1997), apresentada em “A arte de resolver problemas”, que enfatiza o uso de questionamentos para estimular o pensamento reflexivo dos estudantes. Exemplos dessas indagações incluem: “Qual é a incógnita?” e, adaptado ao contexto da atividade, “O que aconteceria se retirássemos as bolinhas?”.

De acordo com Silver (1997), citado por Aizikovitsh-Udi (2014), a Resolução de Problemas está diretamente relacionada ao desenvolvimento da criatividade matemática. Com base nessa perspectiva, Ervynck (1991), também citado por Aizikovitsh-Udi (2014), propôs três níveis de criatividade: o primeiro envolve a aplicação de algoritmos conhecidos; o segundo, a modelagem de situações com base em representações matemáticas; e o terceiro, a construção de soluções novas a partir da análise da estrutura interna do problema.

Conectando essa discussão à prática relatada neste relatório, durante a aula sobre frações, números decimais e porcentagem, aplicamos uma dinâmica utilizando dobraduras para que os alunos compreendessem a definição de fração a partir da relação parte-todo. Essa atividade foi inspirada na dissertação de mestrado de Cristina Mayumi Hamada, intitulada “Construção do Conceito de Fração: Olhares Através da Dobradura”.

Durante a realização da dinâmica, observamos que um aluno conseguiu generalizar a construção das dobraduras para denominadores ímpares, que são considerados mais difíceis por exigirem a percepção da necessidade de dobrar nas diagonais e pontos de interseção.

Enquanto os alunos realizaram com facilidade as frações comuns — meio, quarto e oitavo —, houve maior dificuldade no terço. Após conseguir construir o terço, o aluno foi capaz de estender o raciocínio para encontrar o quinto e o sétimo, explicando que partiu da experiência com o terço para resolver os outros casos. Essa generalização mostra um avanço criativo que vai além da aplicação de procedimentos, alinhando-se ao terceiro nível da criatividade matemática proposto por Ervynck (1991).

Ademais, diante do exposto, é fundamental considerar o ponto de vista dos estudantes. Para que a Resolução de Problemas seja percebida como uma abordagem atrativa, é necessário que estudos e pesquisas apresentem resultados relevantes, capazes de evidenciar sua eficácia no processo de ensino e aprendizagem. Diante disso, identificamos a necessidade de elaborar um formulário contendo perguntas direcionadas à avaliação da Resolução de Problemas como ferramenta pedagógica, com foco nos relatos e percepções dos próprios estudantes.

Foram elaboradas duas questões principais para compor o formulário: (1) “Você considera que as dinâmicas contribuíram para o seu desenvolvimento como estudante? Comente sobre.” e (2) “Alguma atividade específica chamou sua atenção? Se sim, qual?”. Essas perguntas foram formuladas com o intuito de permitir aos estudantes expressarem suas opiniões sobre a metodologia adotada. Decidiu-se dar ênfase à primeira questão, da qual participaram 14

estudantes. As respostas foram bastante significativas, sendo duas delas especialmente representativas:

Aluno(a)1:

“As dinâmicas ajudaram muito no meu desenvolvimento, inclusive em conteúdos que eu não havia aprendido corretamente no colégio. Consegui realmente compreender durante as atividades, como no estudo sobre circunferência, entre outros. Além disso, os professores foram muito compreensivos e prestativos: sempre que surgia uma dúvida, vinham até nós e explicavam passo a passo novamente, muitas vezes nos incentivando a resolver as questões no quadro. Isso contribuiu para uma maior aproximação com os docentes. Criei muito carinho pelos professores e colegas! Aprendi muito com cada um com quem interagi.”

Aluno(a)2:

“Sim. Algumas vezes tive dificuldade para entender determinadas aulas, mas, com o tempo, fui aprendendo.”

Observa-se, no relato do(a) aluno(a) 1, uma clara correspondência com os aspectos discutidos ao longo deste artigo: o protagonismo do estudante, o enfrentamento das defasagens de aprendizagem, a mediação docente e a colaboração entre colegas. A maioria dos depoimentos colhidos reforça esses elementos, como pode ser observado nas seguintes falas: “Sim. Aprendi coisas que serão muito úteis no dia a dia, além de achar as atividades muito divertidas.” e “Sim, me mostraram diferentes formas de estudar e melhoraram meu desempenho em matemática.”

Contudo, conforme já apontado por autores como Lowrie (2001) citado por Vale, Pimentel e Barbosa (2015), diversos estudos têm demonstrado que, no contexto da Resolução de Problemas, alguns alunos tendem a utilizar estratégias de natureza visual, enquanto outros optam por abordagens predominantemente verbais ou analíticas, evidenciando que a Resolução de Problemas nem sempre resulta em efeitos plenamente satisfatórios. Os estudantes são sujeitos singulares, que constroem o conhecimento de maneiras distintas. O depoimento do(a) aluno(a) 2 exemplifica essa diversidade, ainda que tenha desenvolvido algum aprendizado, reconheceu dificuldades ao longo do processo. Infelizmente, até o presente momento, não existe uma metodologia que atenda de forma plena a todos os estudantes. Ainda assim, durante nossas

aulas, buscamos estratégias complementares para potencializar a eficácia da Resolução de Problemas, como discutido ao longo deste trabalho.

CONCLUSÃO

Visto que desde quando a resolução vem sendo discutido para inseri-lo no currículo, pode-se classificar em 3 esferas de ensino, sendo elas: ensino via Resolução de Problemas (uso de ponto de partida - maior eficácia para ensinar conceitos matemáticos) sobre e para (aplicação de conteúdo) e segundo Marcelo Carlos de Proença, 2021 traz como proposta de organização de ensino a seguinte estrutura: Uso do problema como ponto de partida → Formação do conceito → Definição do conteúdo → Aplicação em Novos problemas (PROENÇA 2021). Durante o desenvolvimento dos encontros focamos no ensino via a resolução de problema, para posteriormente trabalhar com definições matemáticas.

Aos indivíduos quando entendem o contexto do problema e trabalha com o conceito para depois aplicar em outras situações, reconhecendo padrões e não seguindo caminhos pré-estabelecidos é quando pensa-se sobre as ideias matemáticas e quando faz sentido para o indivíduo desenvolvendo seu raciocínio cognitivo.

ENCONTROS

1.1 Encontro I – 10/05/2025

1.1.1 Plano de Aula

Público-alvo: Alunos do Ensino Médio e ingressantes do Ensino Superior.

Professores: Letícia Gabryela Cordeiro Lang, Ana Cecília dos Santos Maciel e Felipe Cesar Muller Rio Branco.

Objetivo geral:

- Explorar temas que possibilitem uma interpretação e visualização dos conceitos do Ensino Fundamental.
- Relacionar situações a seus conceitos matemáticos e, à suas aplicabilidades.

Objetivos específicos:

- Definir os principais conjuntos numéricos e suas propriedades;
- Identificar expressões a partir de situações problema;
- Diferenciar expressões e equações;
- Desenvolver concentração, agilidade em cálculos, raciocínio lógico e cálculos mentais;
- Calcular sem o uso da calculadora.

Conteúdos: Números (conjuntos e operações).

Tempo de execução:

1 encontro com duração de 4 horas aula.

Recursos didáticos:

Quadro, giz, atividades impressas, lápis, borracha, projetor, notebook, etiquetas adesivas e jogo de cartas.

Parte 1 (Duração: 15 minutos) – Organização da sala

Neste momento os professores organizarão a sala em 9 grupos de 6 pessoas com o intuito de promover interação entre os estudantes.

A primeira interação será a recepção. Os professores conversarão com os alunos, perguntando nomes, idades, turmas e se desejam ingressar em algum curso superior. Durante esse momento, distribuirão etiquetas para que sejam coladas nas mesas e preenchidas com os nomes dos participantes.

Os professores se apresentarão e explicarão o que é o Promat – um projeto do curso de Matemática da Unioeste que oferece aulas de conteúdos da Educação Básica destinado a alunos do ensino médio e ingressantes do ensino superior, com foco na preparação para vestibulares e o ENEM.

Parte 2 (Duração: 30 minutos) – Dinâmica para introduzir conjuntos numéricos

Para introduzir o tema, os professores proporão uma dinâmica. Cada grupo deverá selecionar cinco palavras relacionadas ao termo “Países” e registrá-las na folha de atividades (Atividade 1).

Após essa escolha, os professores reunirão todas as palavras no quadro e as organizarão, agrupando aquelas que apresentem características semelhantes. Essas serão classificadas pelos seguintes critérios: 1º) divisão por continente (Europa), 2º) idioma (inglês), o 3º critério será deixado como uma variável dependente das palavras escolhidas.

Essa atividade servirá como introdução ao conceito de conjuntos numéricos de forma indireta, sem utilizar, nesse momento, os termos matemáticos específicos.

Parte 3 (Duração: 55 minutos) – Continuação da dinâmica, mas com o tema “números”

Em seguida, os professores trabalharão com a palavra "Números". Solicitarão que os alunos mencionem conjuntos numéricos que já conhecem, números específicos, operações ou até aqueles considerados “estranhos”. As sugestões serão registradas no quadro e, assim como na dinâmica anterior, organizadas em agrupamentos conforme semelhanças, utilizando um diagrama de Venn para representar os conjuntos numéricos. Durante essa atividade, os alunos preencherão a folha de atividades correspondente (Atividade 2).

Após a dinâmica, os professores questionarão os alunos sobre as características dos números naturais, inteiros, racionais e irracionais. Dessa forma, os estudantes colaborarão na formalização do conteúdo, preenchendo as informações a seguir.

Tabela 2 – Atividade para formalização do conteúdo dos conjuntos numéricos

Números Naturais (\mathbb{N}):

Símbolo: \mathbb{N}

Exemplos:

Principais características:

Números Inteiros (\mathbb{Z}):

Símbolo: \mathbb{Z}

Exemplos:

Principais características:

Números Racionais (\mathbb{Q}):

Símbolo: \mathbb{Q}

Exemplos:

Principais características:

Números Irracionais (\mathbb{I}):

Símbolo: \mathbb{I}

Exemplos:

Principais características:

Números Reais (\mathbb{R}):

Símbolo: \mathbb{R}

Exemplos:

Principais características:

Fonte: elaborada pelos autores do presente documento

A tabela encontra-se disponível para os alunos em anexo (Atividade 3).

A expectativa para o preenchimento das informações é:

Tabela 3 – Exemplo resolvido da atividade de formalização

Números Naturais (\mathbb{N}):

São os números usados para contar e ordenar. Incluem o zero e todos os números positivos sem parte decimal.

Exemplos: 0, 1, 2, 3, 4, ...

Símbolo: \mathbb{N}

Principais características: não possuem parte fracionária ou negativa.

Números Inteiros (\mathbb{Z}):

Incluem todos os números naturais, seus opostos e o zero.

Exemplos: -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...

Símbolo: \mathbb{Z}

Principais características: abrangem valores positivos, negativos e o zero, mas não possuem parte fracionária.

Números Racionais (\mathbb{Q}):

São os números que podem ser expressos na forma de fração, onde o numerador e o denominador são inteiros e o denominador é diferente de zero. Incluem os números inteiros e os decimais exatos ou periódicos.

Exemplos: $\frac{1}{2}$; -4; 0,75, 2.

Símbolo: \mathbb{Q}

Principais características: podem ser escritos como fração; decimais finitos ou infinitos periódicos

Números Irracionais (\mathbb{I}):

São os números que não podem ser representados como fração. Sua representação decimal é infinita e não periódica.

Exemplos: $\sqrt{2}$, π , e.

Símbolo: \mathbb{I}

Principais características: não podem ser escritos como fração; decimais infinitos não repetitivos.

Números Reais (\mathbb{R}):

Reúnem todos os números racionais e irracionais.

Compreendem todos os pontos da reta numérica.

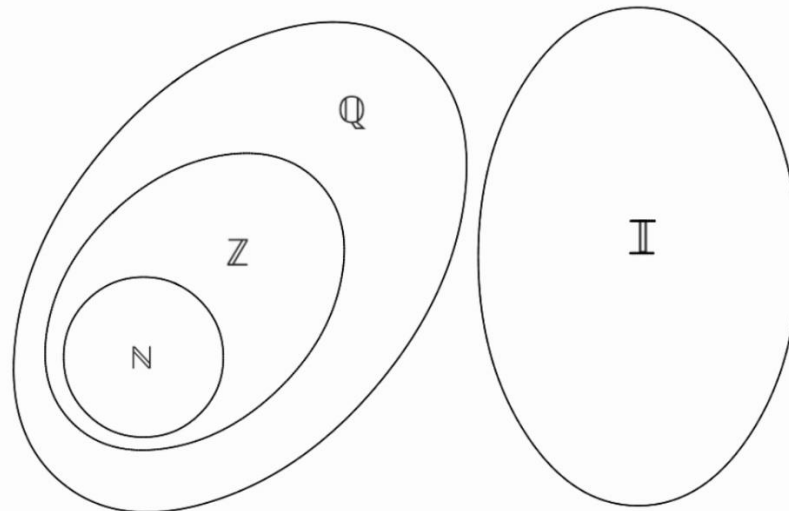
Exemplos: 2, -7, $\sqrt{5}$, 0,333..., π .

Símbolo: \mathbb{R}

Principais características: união dos racionais (\mathbb{Q}) e irracionais (\mathbb{I}).

Fonte: elaborada pelos autores do presente documento

Neste momento, será feita uma breve abordagem sobre os conceitos “união” e “interseção”, aplicando-os no Diagrama de Venn obtido durante a dinâmica.

Figura 1 – Representação do conjunto dos números reais por meio do Diagrama de Venn

Fonte: elaborada pelos autores do presente documento

Em seguida, será proposta uma atividade de Verdadeiro ou Falso para toda a turma, com o objetivo de fixar o conteúdo. A tabela da atividade será impressa e entregue aos alunos, conforme anexo (Atividade 4).

Tabela 4 – Questões de V ou F para fixação do conteúdo

a)	Todo número natural é também um número inteiro.	()
b)	$\sqrt{9}$ é um número irracional.	()
c)	O conjunto dos números racionais inclui frações e dízimas periódicas.	()
d)	π (pi) é um número racional.	()
e)	O número -5 pertence ao conjunto dos números naturais.	()
f)	Todos os números irracionais são reais.	()
g)	A soma de dois números irracionais é sempre irracional.	()
h)	A divisão de dois números inteiros sempre resulta em um número inteiro.	()
i)	Números irracionais podem ser expressos como fração.	()
j)	Todo número real é ou racional ou irracional.	()

Fonte: elaborada pelos autores do presente documento

Resolução:

a) Verdadeiro. Todo número natural é também um número inteiro, pois o conjunto dos naturais (\mathbb{N}) está contido dentro dos inteiros (\mathbb{Z}).

- b)** Falso. $\sqrt{9}$ é igual a 3, que é um número inteiro e racional, não irracional.
- c)** Verdadeiro. O conjunto dos números racionais inclui frações (como $1/2$) e dízimas periódicas (como $0,333\dots$).
- d)** Falso. π (pi) é um número irracional, pois possui infinitas casas decimais sem repetição e não pode ser expresso como fração.
- e)** Falso. O número -5 não pertence aos naturais (\mathbb{N}), pois esse conjunto só inclui números não-negativos (0, 1, 2, ...).
- f)** Verdadeiro. Todos os números irracionais são reais, pois fazem parte do conjunto \mathbb{R} (reais), que é a união dos racionais e irracionais.
- g)** Falso. A soma de dois irracionais nem sempre é irracional. Exemplo: $\sqrt{2} + (-\sqrt{2}) = 0$, que é racional.
- h)** Falso. A divisão de dois inteiros só resulta em um inteiro se o numerador for múltiplo do denominador. Exemplo: $5 \div 2 = 2,5$ (não inteiro).
- i)** Falso. Números irracionais, por definição, não podem ser expressos como fração de inteiros.
- j)** Verdadeiro. Todo número real pertence ou ao conjunto dos racionais (\mathbb{Q}) ou ao dos irracionais (\mathbb{I}), sem exceções.

INTERVALO: 09h40min – 10h (20 minutos)

Parte 4 (Duração: 60 minutos) – Jogo das operações

Após o intervalo, os professores pedirão que os alunos sejam divididos em grupos de 3 pessoas, se necessário poderão ficar em duplas. Em seguida o próximo jogo será explicado.

Jogo das Operações - proposta do jogo:

O jogo das operações é um jogo de cartas que tem como proposta desenvolver o raciocínio lógico, estratégias de resolução de operações aritméticas e utilização de propriedades por meio da construção de expressões numéricas. O cálculo exigido nas jogadas proporciona a construção, reconstrução e organização do pensamento matemático.

O jogo pode ser trabalhado com alunos do Ensino Fundamental a partir do quarto ano, em grupos de 2 a 6 alunos. Neste caso os alunos serão agrupados 3 a 3. Seu objetivo ao jogar é conseguir o maior resultado possível de uma expressão numérica, a cada rodada.

Ao apresentar o jogo, os professores esperarão demonstrar a importância da resolução correta da ordem de prioridade das operações e dos sinais de colchetes, parênteses e chaves, destacando como a resolução incorreta impacta o resultado.

Serão explorados exemplos, como o seguinte:

$$10 - 3 \times 2$$

“João tinha 10 balas. Ele deu 3 balas para cada um de seus 2 amigos. Quantas balas sobraram?”

Será apresentada a resolução equivocada:

$$10 - 3 = 7 \times 2 = 14 \text{ balas}$$

Essa resolução não fará sentido, pois resolver a subtração primeiro resultará em um resultado errado, já que não há como o total ser 14 balas, considerando que João começou com 10 e deu duas porções de 3 balas para seus amigos."

A seguir, será apresentada a resolução correta do problema, passo a passo.

$$2 \times 3 = 6$$

$$10 - 6 = 4$$

Explicação: Se forem dadas três balas para cada amigo, então $10 - 6 = 4$, ou seja, sobraram quatro balas.

Assim, serão demonstradas as regras matemáticas, que estarão baseadas em diretrizes fundamentais para a resolução correta.

Material

- 20 cartas com números de 0 a 9 repetidos duas vezes.
- 8 cartas referentes as quatro operações: adição (2), subtração (2), multiplicação (2) e divisão. (2).
- 4 cartas contendo sinais de parênteses.
- Material para anotação (lápiz e folha).

Tabela auxiliar para resolução (Atividade 5 - anexo).

Regras do jogo e como jogá-lo

- Separar as cartas em dois montes: um monte com as cartas de números e outro com as cartas de sinais das operações.

- Para cada rodada, um jogador retira três cartas de números e duas cartas de sinais das operações aleatoriamente.
- Para dar início ao jogo, o jogador expõe as três cartas com números e, em seguida, coloca os sinais da operação, entre os números. Por exemplo, “ $8 \times 3 - 4$ ”, os 3 jogadores devem montar uma expressão diferente do colega, mas utilizando os mesmos elementos, para compararem os resultados.
- Ao montar a expressão, o jogador deve usar o cálculo mental, obtendo o resultado da primeira rodada, na qual a quantidade de pontos ganha por cada jogador, é igual ao resultado da expressão.
- Ao final de 5 rodadas a pontuação é somada obtendo-se o resultado de cada jogador.
- **Observação:** O jogador SEMPRE poderá mudar a ordem de colocação das cartas e, também poderá usar os parênteses se precisar, de forma a alterar o resultado da expressão. Por exemplo, $8 \times (4 - 3)$.

Orientações Metodológicas

O jogo proposto por Araujo (2002) é desenvolvido em grupos. Os professores desenvolverão o jogo em grupos de 2 a 3 estudantes, utilizando o material do Jogo das Operações. Eles darão início ao jogo com a utilização do “dois ou um” para determinar quem começará. Os estudantes vencedores tirarão aleatoriamente duas cartas com operações e três cartas com números, organizarão e socializarão em grupo a melhor distribuição das cartas, a colocação dos sinais e parênteses para obtenção do maior resultado numérico em cada expressão. A cada expressão numérica resolvida, os alunos farão a anotação na folha de atividades, com uma coluna das expressões e outra dos resultados obtidos.

Após o período de jogo, os professores propiciarão o debate dos resultados a partir das expressões numéricas apresentadas.

Questionamentos

- Quais as melhores operações para obter o maior resultado?
- Existe diferença no resultado de uma expressão se invertemos a ordem das operações?
Comente.
- Qual a importância do uso dos parênteses?
- Existe diferença no resultado de algumas expressões se colocarmos parênteses? Comente.

Parte 5 (Duração: 20 minutos) – Formalização dos elementos

Após a dinâmica, os professores questionarão quais aspectos os alunos julgarão importantes para a resolução, e se existirá uma hierarquia para que a resposta faça sentido.

O conteúdo será formalizado em sequência a partir das ideias comentadas pelos alunos, somadas às partes que os professores julgarem importantes.

A partir dessa formalização, os professores proporão problemas para a turma toda em conjunto, com o objetivo de fixar o conteúdo.

Soma

A soma carrega em sua essência as ideias de:

1. Adicionar
2. Acrescentar
3. Juntar

Subtração

A subtração carrega em sua essência as ideias de:

1. Retirar
2. Debitar
3. Remover

Multiplicação

A multiplicação carrega em sua essência as ideias de:

1. Aumentar
2. Juntar partes menores em uma parte maior
3. Somar números sucessivamente

Divisão

A divisão carrega em sua essência as ideias de:

1. Repartir
2. Separar uma parte maior em partes menores iguais
3. Distribuição

Expressões Numéricas

- Em Matemática utilizamos expressões numéricas para traduzir, descrever e expressar situações do cotidiano, as quais podem ser representadas por expressões que envolvam uma ou mais operações matemáticas e que podem ou não estar agrupadas por sinais de associação, resultando em uma quantidade numérica

- Podemos utilizar números, operações e sinais de associação, respeitando uma ordem de prevalência e propriedades operatórias, resultando em apenas um número, apresentando o problema de forma concisa.
- Ordem de prioridade:
 1. Multiplicação e divisão (na ordem em que aparecem da esquerda para a direita).
 2. Soma e subtração (na ordem em que aparecem da esquerda para a direita).
 3. Parênteses
 4. Colchetes
 5. Chaves

Parte 6 (Duração: 15 minutos) – Atividades

Atividades que reforcem as ideias de operações e expressões numéricas, de forma que possibilite os alunos identificarem os conteúdos em situações-problema, em anexo documento auxiliar para as resoluções (Atividade 6).

Atividades para serem feitas durante a aula

- a) João tem 12 anos, seu irmão tem 5 anos a mais que ele, e sua irmã tem a metade da idade do irmão. Qual é a soma das idades dos três?
- b) Um ciclista percorreu 15 km na primeira hora, 10 km na segunda e 5 km na terceira. Quantos quilômetros ele percorreu ao todo?
- c) Ana tem 24 balas e quer dividir igualmente entre ela e suas 3 amigas. Quantas balas cada uma receberá?
- d) Um carro gasta 5 litros de gasolina por dia. Se o litro custa R\$ 6,00, quanto ele gasta em uma semana (7 dias)?
- e) Um carro viaja a 60 km/h por 3 horas e depois a 80 km/h por 2 horas. Qual foi a distância total percorrida?
- f) (UEMA) Um carro-tanque chega a um posto de venda de combustível com uma carga de 24.300 litros de gasolina que deverá ser descarregada no reservatório desse posto, na base de 900 litros por minuto. Após 12 minutos do início dessa operação, quantos litros de gasolina ainda restavam no carro-tanque?
- g) (UFPE) Duda faz bolos na cozinha do restaurante COMER BEM. Para uma receita, ela juntou em um recipiente três quilogramas e meio de farinha de um saco com mais um quilo e duzentos e cinquenta gramas de outra embalagem. Após a massa estar pronta, Duda resolveu separá-la em meia dúzia de formas idênticas.

A expressão correspondente ao total de gramas de farinha utilizada em cada forma é:



h) Se 4 operários constroem um muro em 6 dias, quantos dias 6 operários levariam para construir o mesmo muro?

i) Analise a solução da expressão algébrica abaixo e assinale a alternativa correta:

$$\{(10 \times 10 + 4 \times 11):12 - [(20 + 19 \times 10):39 + 15]\} + 50$$

$$\{(100 + 44):12 - [(39 \times 10):39 + 15]\} + 50$$

$$\{144:12 - [390:39 + 15]\} + 50$$

$$\{12 - [10 + 15]\} + 50$$

$$\{12 - 25\} + 50$$

$$- 13 + 50$$

$$37$$

I.A resolução está correta, nenhum erro foi cometido.

II.A resolução está correta, mas por coincidência, pois alguns erros foram cometidos.

III.A resolução está incorreta, o verdadeiro resultado é 50.

IV.A resolução está incorreta, pois foi feita uma soma em vez de dar prioridade a uma multiplicação.

V.A resolução está incorreta, pois as multiplicações devem ser feitas sempre depois das divisões.

Parte 7 (Duração: 5 minutos) - Despedida

Por fim, indicaremos os exercícios que devem ser feitos em casa, e informaremos que estaremos disponíveis a esclarecer as dúvidas no nosso grupo do Whatsapp.

Avaliação

Os alunos serão avaliados a partir da participação durante as atividades e a demonstração de compreensão referente ao conteúdo pela observação dos professores. Esta observação individual, torna possível visualizar e auxiliar cada aluno em suas dificuldades específicas, de forma que a aprendizagem ocorra num âmbito qualitativo.

1.1.2 Relatório

Iniciamos os preparativos da sala organizando as carteiras em grupos de seis participantes. O encontro contou com a presença de 33 estudantes.

Optamos por essa organização com o objetivo de incentivar a socialização entre os estudantes e facilitar a realização de futuras atividades ao longo da aula. À medida que os alunos foram chegando, ocuparam os assentos disponíveis, respeitando a organização em grupos. Como as turmas foram divididas por ordem alfabética dos inscritos, muitos dos presentes ainda não se conheciam.

Assim que todos se acomodaram, realizamos nossa apresentação como professores e, em seguida, iniciamos uma breve roda de apresentações dos participantes. Pedimos aos alunos que dissessem seus nomes, idades e, se tinham interesse em ingressar em algum curso superior. Durante esse momento, entregamos etiquetas para que cada um colasse em sua carteira, identificando-se com o nome e explicamos o que é o Promat, contextualizando o projeto e sua proposta educativa.

Para dar início à atividade da aula, propusemos que cada grupo mencionasse o nome de um país, que após dito foi registrado no quadro. Neste momento fomos surpreendidos, pois o nosso objetivo de trabalhar aspectos matemáticos de forma interdisciplinar, foi cumprido, os alunos comentavam aspectos como história, moeda utilizada, idioma, localização, influência na mitologia e a origem do idioma (os derivados do latim).

A partir dessas observações, desenhamos no quadro um diagrama de Venn, no qual os países foram sendo agrupados conforme os critérios definidos em conjunto com os alunos, este momento contou com a atenção integral dos alunos, todos estavam atentos e maior parte participou. Após a dinâmica partimos para a contextualização matemática (conjuntos numéricos), que objetivava realizar analogia com a primeira atividade. Agora a turma tinha que dizer números e, para garantir uma variedade de exemplos e permitir uma abordagem mais ampla dos conjuntos numéricos, oferecemos sugestões durante o processo, incentivando-os a citar números decimais, dízimas periódicas, frações e números negativos, mas infelizmente eles estavam bem condicionado a escolherem números “bonitos” e convenientes, isso deixou claro que os alunos tinham pouco conhecimento sobre conjuntos numéricos, pois citavam apenas números pertencentes ao conjunto dos \mathbb{N} (*naturais*) e \mathbb{Z} (*inteiros*).

Ao listarmos no quadro os números mencionados, percebemos que os alunos trouxeram uma diversidade significativa de exemplos somente após pedirmos que indicassem os números



mais “estranhos” que conheciam, como números naturais grandes (por exemplo, 1.507.802.300), dízimas não periódicas, além dos famosos π , φ e até $\sqrt{-1}$.

A partir dessa seleção, começamos a questioná-los sobre como classificar cada um desses números. Em um processo dialogado, fomos conduzindo os alunos à identificação dos conjuntos numéricos aos quais cada elemento pertencia.

Distribuímos a folha de atividades, que continha um espaço para que os alunos acompanhassem a resolução da atividade e pudessem registrar as informações. Conforme avançávamos na explicação, destacamos a necessidade de criar conjuntos numéricos à medida que surgiam elementos que não pertenciam aos anteriores, sempre destacando que a matemática surgiu de necessidades reais.

Na sequência, propusemos a resolução de uma atividade de verdadeiro ou falso, composta por afirmações que exigiam dos alunos o reconhecimento dos diferentes conjuntos numéricos, mas infelizmente nossa aula foi afetada pelo tempo e deixamos esta atividade para ser feita em casa, visto que todos participaram e mostrando entendimento durante este momento.

Após o intervalo partimos para uma dinâmica com um jogo de operações confeccionado por nós. Esse jogo constituía-se de números de 0 a 9, operações (sinais, multiplicação, divisão, soma, subtração) e dois parênteses. O jogo consistia em pegar três cartas com números e duas cartas com operações para obter um resultado; o jogador com maior número era o vencedor da rodada (não foi permitido o uso da calculadora, o objetivo era estimular o cálculo mental). Enquanto auxiliávamos os alunos, fazíamos questionamentos que induziam a necessidade do uso dos parênteses e, sugeriam qual a ordem de prioridade das operações.

Para finalizar, formalizamos o tema da resolução da expressão numérica, passando o conteúdo no quadro para que eles registrassem a ordem de prioridade presente nas expressões. Após a formalização, os alunos começaram resolver as atividades extras que propusemos de acordo com o conteúdo da aula e objetivo do projeto, ainda restando alguns exercícios para serem resolvidos em casa, neste momento os alunos apresentaram bastante dificuldade e pediam bastante por ajuda, fato que nos levou a trabalhar os mesmos elementos em outras aulas, mas de forma indireta.

1.1.3 Materiais utilizados**Atividades 10/05/2025****Atividade 1 -**

Países	

Atividade 2 –

Números	
NÚMEROS	DIAGRAMA
GRUPOS	



Atividade 3 -

Números Naturais (\mathbb{N}):

Símbolo: \mathbb{N}

Exemplos:

Principais características:

Números Inteiros (\mathbb{Z}):

Símbolo: \mathbb{Z}

Exemplos:

Principais características:

Números Racionais (\mathbb{Q}):

Símbolo: \mathbb{Q}

Símbolo:

Principais características:

Números Irracionais (\mathbb{I}):

Símbolo: \mathbb{I}

Exemplos:

Principais características:

Números Reais (\mathbb{R}):

Símbolo: \mathbb{R}

Exemplos:

Principais características:

Atividade 4 -

- | | | |
|----|---|-----|
| a) | Todo número natural é também um número inteiro. | () |
| b) | $\sqrt{9}$ é um número irracional. | () |
| c) | O conjunto dos números racionais inclui frações e dízimas periódicas. | () |
| d) | π (pi) é um número racional. | () |
| e) | O número -5 pertence ao conjunto dos números naturais. | () |
| f) | Todos os números irracionais são reais. | () |
| g) | A soma de dois números irracionais é sempre irracional. | () |
| h) | A divisão de dois números inteiros sempre resulta em um número inteiro. | () |
| i) | Números irracionais podem ser expressos como fração. | () |
| j) | Todo número real é ou racional ou irracional. | () |

Atividade 5 –

Jogador	Expressão			Pontuação				

Atividade 6 –

- a) João tem 12 anos, seu irmão tem 5 anos a mais que ele, e sua irmã tem a metade da idade do irmão. Qual é a soma das idades dos três?
- b) Um ciclista percorreu 15 km na primeira hora, 10 km na segunda e 5 km na terceira. Quantos quilômetros ele percorreu ao todo?
- c) Ana tem 24 balas e quer dividir igualmente entre ela e suas 3 amigas. Quantas balas cada uma receberá?
- d) Um carro gasta 5 litros de gasolina por dia. Se o litro custa R\$ 6,00, quanto ele gasta em uma semana (7 dias)?
- e) Um carro viaja a 60 km/h por 3 horas e depois a 80 km/h por 2 horas. Qual foi a distância total percorrida?
- f) (UEMA) Um carro-tanque chega a um posto de venda de combustível com uma carga de 24.300 litros de gasolina que deverá ser descarregada no reservatório desse posto, na base de 900 litros por minuto. Após 12 minutos do início dessa operação, quantos litros de gasolina ainda restavam no carro-tanque?
- g) (UFPE) Duda faz bolos na cozinha do restaurante COMER BEM. Para uma receita, ela juntou em um recipiente três quilogramas e meio de farinha de um saco com mais um quilo e duzentos e cinquenta gramas de outra embalagem. Após a massa estar pronta, Duda resolveu separá-la em meia dúzia de formas idênticas. A expressão correspondente ao total de gramas de farinha utilizada em cada forma é:
- h) Se 4 operários constroem um muro em 6 dias, quantos dias 6 operários levariam para construir o mesmo muro?



- i) Analise a solução da expressão algébrica abaixo e assinale a alternativa correta:

$$\{(10 \times 10 + 4 \times 11):12 - [(20 + 19 \times 10):39 + 15]\} + 50$$

$$\{(100 + 44):12 - [(39 \times 10):39 + 15]\} + 50$$

$$\{144:12 - [390:39 + 15]\} + 50$$

$$\{12 - [10 + 15]\} + 50$$

$$\{12 - 25\} + 50$$

$$- 13 + 50$$

$$37$$

- (a) A resolução está correta, nenhum erro foi cometido.
(b) A resolução está correta, mas por coincidência, pois alguns erros foram cometidos.
(c) A resolução está incorreta, o verdadeiro resultado é 50.
(d) A resolução está incorreta, pois foi feita uma soma em vez de dar prioridade a uma multiplicação.
(e) A resolução está incorreta, pois as multiplicações devem ser feitas sempre depois das divisões.

Atividades Extras

1. (ENEM 2018 – Adaptado) Em relação aos principais conjuntos numéricos, é CORRETO afirmar que:
- (a) Todo número racional é natural, mas nem todo número natural é racional.
(b) Todo número inteiro é natural, mas nem todo número natural é inteiro.
(c) Todo número real é natural, mas nem todo número natural é real.
(d) Todo número racional é inteiro, mas nem todo número inteiro é racional.
(e) Todo número irracional é real.
2. A respeito da resolução de expressões numéricas, assinale a alternativa correta:
- (a) As operações devem ser feitas na ordem em que aparecem.
(b) É necessário calcular primeiro todas as operações no interior dos parênteses na ordem em que elas aparecem.
(c) A pessoa que realiza os cálculos escolhe a ordem mais oportuna para eles.
(d) Não existe ordem para realização dos cálculos em uma expressão numérica.

(e) As adições e subtrações são os últimos cálculos na lista de prioridades das expressões numéricas.

3. **(ENEM 2022 – Adaptado)** Uma instituição de ensino superior ofereceu vagas em um processo seletivo de acesso a seus cursos. Finalizadas as inscrições, foi divulgada a relação do número de candidatos por vaga em cada um dos cursos oferecidos. Esses dados são apresentados no quadro. Qual foi o número total de candidatos inscritos nesse processo seletivo?

Curso	Número de vagas oferecidas	Número de candidatos por vaga
Administração	30	6
Ciências Contábeis	40	6
Engenharia Elétrica	50	7
História	30	8
Letras	25	4
Pedagogia	25	5

4. **(ENEM 2020 – Adaptado)** Uma pessoa precisa comprar 15 sacos de cimento para uma reforma em sua casa. Faz pesquisa de preço em cinco depósitos que vendem o cimento de sua preferência e cobram frete para entrega do material, conforme a distância do depósito à sua casa. As informações sobre preço do cimento, valor do frete e distância do depósito até a casa dessa pessoa estão apresentadas no quadro.

Depósito	Valor do saco de cimento - (R\$)	Valor do frete para cada quilômetro - (R\$)	Distância entre a casa e o depósito - (km)
A	23,00	1,00	10
B	21,50	3,00	12



C	22,00	1,50	14
D	21,00	3,50	18
E	24,00	2,50	2

A pessoa escolherá um desses depósitos para realizar sua compra, considerando os preços do cimento e do frete oferecidos em cada opção. Se a pessoa decidir pela opção mais econômica, qual deverá ser o depósito escolhido para a realização dessa compra?

5. **(ENEM 2004 – Adaptado)** Um fabricante de cosméticos decide produzir três diferentes catálogos de seus produtos, visando a públicos distintos. Como alguns produtos estarão presentes em mais de um catálogo e ocupam uma página inteira, ele resolve fazer uma contagem para diminuir os gastos com originais de impressão. Os catálogos C1, C2 e C3 terão, respectivamente, 50, 45 e 40 páginas. Comparando os projetos de cada catálogo, ele verifica que C1 e C2 terão 10 páginas em comum; C1 e C3 terão 6 páginas em comum; C2 e C3 terão 5 páginas em comum, das quais 4 também estarão em C1. Efetuando os cálculos correspondentes, o fabricante concluiu que, para a montagem dos três catálogos, necessitará de um total de originais de impressão igual a:
6. **(ENEM 2010 – Adaptado)** Uma escola recebeu do governo uma verba de R\$ 1000,00 para enviar dois tipos de folhetos pelo correio. O diretor da escola pesquisou que tipos de selos deveriam ser utilizados. Concluiu que, para o primeiro tipo de folheto, bastava um selo de R\$ 0,65 enquanto para folhetos do segundo tipo seriam necessários três selos, um de R\$ 0,65, um de R\$ 0,60 e um de R\$ 0,20. O diretor solicitou que se comprassem selos de modo que fossem postados exatamente 500 folhetos do segundo tipo e uma quantidade restante de selos que permitisse o envio do máximo possível de folhetos do primeiro tipo. Quantos selos de R\$0,65 foram comprados?

Respostas:

1- e; 2 – e; 3 - 1235; 4 - c; 5 -118; 6 - 923

1.2 Encontro II – 17/05/2025

1.2.1 Plano de Aula

Público-alvo: Alunos do Ensino Médio e ingressantes do Ensino Superior.

Professores: Letícia Gabryela Cordeiro Lang, Ana Cecília dos Santos Maciel e Felipe Cesar Muller Rio Branco.

Objetivo geral:

- Explorar temas que possibilitem uma interpretação e visualização dos conceitos de forma implícita.
- Relacionar situações a seus conceitos matemáticos à suas aplicabilidades.

Objetivos específicos:

- Identificar frações como resultado de divisões e relacioná-las com representações decimais e percentuais;
- Realizar operações;
- Compreender as frações como expressões de operações, números decimais e porcentagens, reconhecendo suas diferentes formas de representação;
- Interpretar frações em diferentes contextos, reconhecendo seus significados como parte-todo, razão e operador;
- Resolver problemas envolvendo conversão entre frações.

Conteúdos: Frações, Números Decimais e Porcentagem.

Tempo de execução:

1 encontro com duração de 4 horas

Recursos didáticos:

Quadro, giz, atividades impressas, folhas A4 coloridas (300), tesouras (40), régua (33, para apoiar dobras e cortes, não para medir), lápis, borracha, folha A3 (3), projetor, notebook, dominó das porcentagens, 25 prendedores de roupa, barbante e fita.

Recepção (Duração: 20 minutos) – História do Origami

Os alunos entrarão na sala, que estará dividida em 7 grupos de 6 pessoas.

Os professores contarão um pouco sobre a história do origami, explicando que, embora ele seja mais conhecido no Japão, sua origem está na China, onde o papel foi inventado. Será ressaltado que o origami teve inicialmente uso em cerimônias religiosas e, com o passar do tempo, passou a ser uma forma de arte recreativa. (HAMADA, 2023).



Além de arte, o origami também envolve geometria. Ele é usado como inspiração em engenharia e arquitetura. Muitos projetos modernos de prédios utilizam estruturas dobradas inspiradas em origami para criar formas geométricas resistentes, leves e inovadoras.

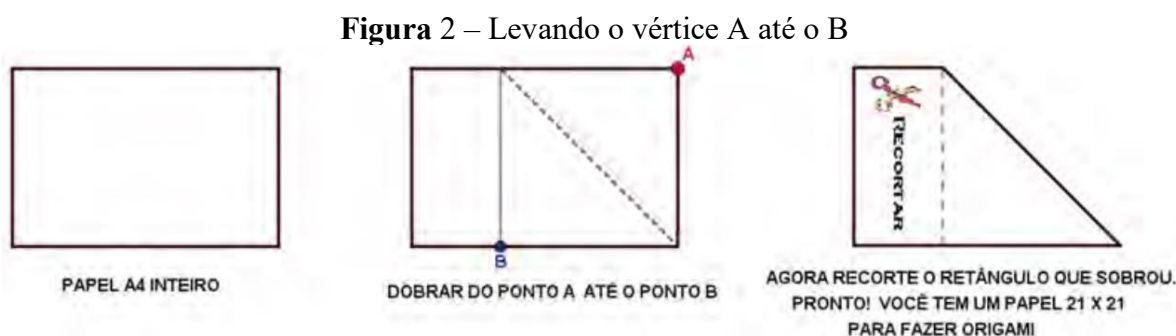
Serão apresentadas em *slides* as edificações que utilizaram de princípios da dobradura para serem projetadas. (LOVE PAPER BRASIL, 2025).

Após esse momento, será feita a ponte com a matemática, destacando que ao dobrar o papel, as pessoas começaram a perceber as partes iguais do todo, ou seja, as frações.

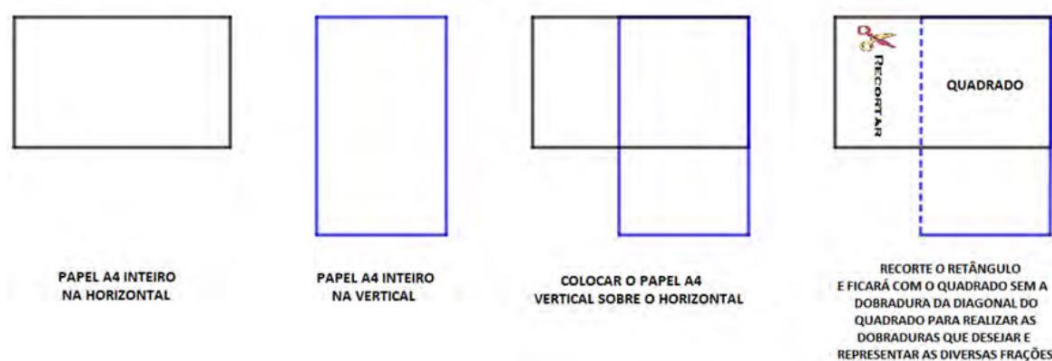
Parte 1 (Duração: 10 minutos) – Construção do quadrado

Os professores entregarão a cada dupla duas folhas A4 e proporão o primeiro desafio: transformar a folha retangular em um quadrado, sem medir e anotando o passo a passo de como encontraram a fração solicitada. Após o desafio, serão apresentadas duas estratégias possíveis:

- Usar a lateral menor e dobrá-la sobre a lateral maior.



- Usar duas folhas A4 e observar a sombra projetada quando sobrepostas em “L”, formando um quadrado por alinhamento.

Figura 3 – Outra forma de representar o quadrado

Fonte: Construção do Conceito de Fração: Olhares Através da Dobradura, Cristina Mayumi Hamada

Na frente da sala, os professores utilizarão uma folha A3 para fazer os passos com a turma.

Parte 2 (Duração: 5 minutos) – Metades

Com o quadrado formado, os alunos deverão agora encontrar a metade do papel. Será deixado livre para que escolham entre dobra diagonal, horizontal ou vertical.

Os professores perguntarão: “Se temos o todo e encontramos a metade, qual fração temos?”

Diferentes dobraduras serão exploradas:

- Diagonal → dois triângulos $\left(\frac{1}{2}\right)$;
- Horizontal/Vertical → duas faixas retangulares $\left(\frac{1}{2}\right)$.

Parte 3 (Duração: 5 minutos) – Quartos $\left(\frac{1}{4}\right)$

Com a dobradura de metade já feita, os alunos agora dobrarão novamente as partes ao meio, obtendo quartos. Será destacado que ao dobrar a metade da metade novamente, temos $\frac{1}{8}$ do total.

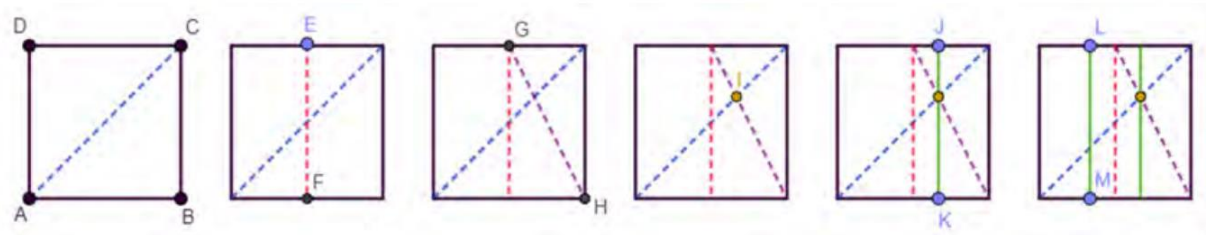
Parte 4 (Duração: 15 minutos) – Terços $\left(\frac{1}{3}\right)$

Os professores desafiarão: “como representar $\frac{1}{3}$ do quadrado?”. Após as explorações, apresentarão uma construção possível:

- Obter a metade do quadrado pela diagonal e pelos retângulos,
- Dobrar a diagonal do retângulo,
- O ponto de interseção entre as diagonais indica $\frac{1}{3}$ do lado, permitindo dividir o quadrado em três tiras de mesma largura.



Figura 4 – Dobradura para encontrar $\frac{1}{3}$



Fonte: Construção do Conceito de Fração: Olhares Através da Dobradura, Cristina Mayumi Hamada

Por quê? Essa divisão pode ser explicada pela semelhança de triângulos: ao fazer a dobra, forma-se um triângulo pequeno que é semelhante ao triângulo maior do quadrado. Como os triângulos são proporcionais, essa relação mostra que o ponto de interseção divide o lado em três partes iguais.

Com os resultados já obtidos, é observado que no conhecimento dos números naturais, 3 é maior que 2, mas no domínio dos Racionais a fração $\frac{1}{3}$ é menor que $\frac{1}{2}$.

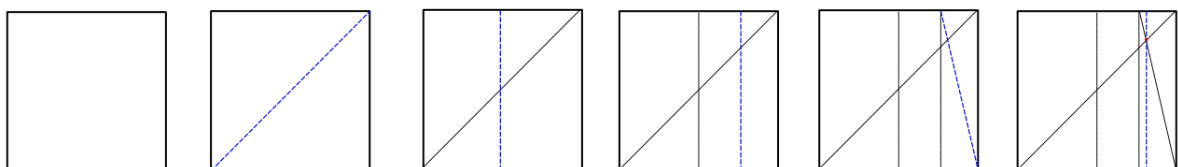
Parte 5 (Duração: 10 minutos) - A metade de $\frac{1}{3}$: construção de $\frac{1}{6}$

Diante da construção de $\frac{1}{3}$, os professores desafiarão: “como obter $\frac{1}{6}$ do quadrado?”. Após as tentativas dos alunos, mostrarão que dividindo cada terço ao meio, é possível formar seis partes iguais, cada uma representando $\frac{1}{6}$.

Parte 6 (Duração: 15 minutos) - Encontrar $\frac{1}{5}$

Os professores perguntarão: **é possível obter $\frac{1}{5}$ do quadrado?** Após as tentativas, mostrarão o seguinte caminho:

Figura 5 – Dobradura para encontrar $\frac{1}{5}$



Fonte: elaborada pelos autores do presente documento

É possível ver que, a partir de $\frac{1}{2}$ encontramos $\frac{1}{3}$ e a partir de $\frac{1}{4}$ encontramos $\frac{1}{5}$.

Parte 7 (Duração: 10 minutos) - Encontrar $\frac{1}{10}$

Por fim, os professores proporão o último desafio: como obter $\frac{1}{10}$ do quadrado? Após as tentativas, mostrarão que ao dividir cada $\frac{1}{5}$ ao meio, obtêm-se dez partes iguais, cada uma equivalente a $\frac{1}{10}$ do quadrado.

Se houver tempo antes do intervalo, os professores sugerirão a construção de $\frac{1}{7}$ e $\frac{1}{9}$. Caso contrário, essa atividade será proposta como tarefa de casa.

INTERVALO: 09h40min – 10h (20 minutos)

Parte 8 (Duração: 20 minutos) – Trechos do desenho *Cyberchase*²

Os professores aproximarão os conteúdos a situações interessantes para aumentar o engajamento dos alunos nas atividades. Por isso, apresentarão trechos de um episódio do desenho *Cyberchase*, com o intuito de introduzirmos a comparação de frações com porcentagem.

Nesta primeira parte do desenho animado os três amigos Jack, Matheus e Inês estão atras de seu amigo Digito que não estava no local de encontro marcado, então começaram a procurá-lo e logo avistaram uma porta.

5:35 INÍCIO - 8:40 FIM

Durante os primeiros minutos do vídeo, as frações comparadas são: $\frac{4}{10}$, $\frac{7}{10}$, $\frac{4}{5}$. Os três amigos devem achar qual a fração maior, e para isso eles igualaram os denominadores para realizarem as comparações.

13:38 INÍCIO - 16:35 FIM

No segundo recorte do vídeo as frações comparadas serão as seguintes: $\frac{7}{10}$, $\frac{7}{20}$, $\frac{8}{25}$ logo tiveram que igualar os denominadores para 100, para resolverem o problema do enredo e introduzirem a porcentagem.

20:18 INÍCIO - FIM DO VIDEO

² Animação estadunidense-canadense, criada por Sandra Sheppard e produzida pela Nelvana



O vídeo retrata situações nas quais os personagens identificam a proporcionalidade entre frações, e porcentagens.

No terceiro recorte do vídeo as frações como: $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{3}{4}$, tiveram o enfoque no modo de porcentagem para serem realizados as comparações.

Parte 9 (Duração: 25 minutos) – Formalização dos conteúdos

Equivalência em porcentagens e frações significa que dois números diferentes representam o mesmo valor.

Exemplos Práticos:

1) $50\% = \frac{1}{2}$

50% de um bolo é a mesma coisa que metade ($\frac{1}{2}$) do bolo.

2) $25\% = \frac{1}{4}$

25% de uma pizza equivale a uma fatia de um total de 4 fatias iguais.

3) $10\% = \frac{1}{10}$

Se você tem 10% de 100 reais, *é o mesmo que* 10 reais (porque $100 \div 10 = 10$).

Frações

Dois números inteiros a e b com $b \neq 0$ escritos na forma $\frac{a}{b}$ formam uma fração. Em que a é dito numerador e b é o denominador

Vamos conceituar os termos utilizando as seguintes frações:

1) **Frações próprias** (numerador < denominador):

• **Exemplo:** $\frac{2}{3}$ ($2 < 3$)

Representa uma parte menor que o inteiro.

2) **Frações impróprias** (numerador \geq denominador):

• **Exemplo:** $\frac{5}{3}$ ($5 > 3$)

Representa mais que um inteiro (pode ser transformada em número misto).

3) **Frações aparentes** (numerador é múltiplo do denominador):

• **Exemplo:** $\frac{6}{3} = 2$

Equivalem a um número natural.

4) **Fração mista** (inteiro + fração própria):

• **Exemplo:** $1\frac{2}{3}$ (resultado da conversão de $\frac{5}{3}$)

Representa 1 inteiro e mais $\frac{2}{3}$.

5) Porcentagens (denominador 100):

- **Exemplo:** $\frac{75}{100} = 75\%$

Esses conceitos ajudam a classificar e entender diferentes representações fracionárias.

Parte 10 (Duração: 25 minutos) - Atividade do varal

Os professores dividirão entre os grupos um total de 25 cartões com frações variando de -10 a 10, pendurados em um varal feito com barbante na frente da sala, que representará uma reta numérica com o número 0 marcado exatamente no meio.

Em seguida, os professores indicarão que os grupos discutam a posição de cada fração nessa reta numérica representada pelo varal.

As frações presentes nos cartões serão:

Frações impróprias

1. $\frac{17}{5}$
2. $-\frac{23}{7}$
3. $\frac{29}{4}$
4. $-\frac{35}{8}$
5. $\frac{41}{6}$

Frações próprias

6. $\frac{3}{10}$
7. $-\frac{5}{9}$
8. $\frac{7}{12}$
9. $-\frac{2}{11}$
10. $\frac{9}{14}$

Frações mistas

11. $3\frac{2}{7}$
12. $-5\frac{4}{9}$
13. $6\frac{1}{3}$
14. $-2\frac{7}{8}$
15. $4\frac{5}{6}$

Frações aparentes

16. $\frac{10}{10}$
17. $-\frac{9}{9}$
18. $\frac{8}{8}$
19. $-\frac{7}{7}$
20. $\frac{6}{6}$

Porcentagens

21. $\frac{25}{100}$
22. $-\frac{40}{100}$
23. $\frac{73}{100}$
24. $-\frac{12}{100}$
25. $\frac{89}{100}$

Exemplo, se no varal tínhamos $\frac{1}{2}, \frac{4}{4}, \frac{7}{5}$ e $\frac{200}{100}$:

- **Própria:** $\frac{1}{2}$



- **Imprópria/Aparente:** $\frac{4}{4} = 1$ e $\frac{200}{100} = 2$
- **Mista:** $\frac{7}{5} = 1\frac{2}{5}$
- **Porcentagem:** $\frac{200}{100} = 200\%$

Os professores pedirão que os alunos registrem 10 frações presentes no varal e representem cada uma no caderno nas formas de porcentagem e número decimal.

Após os registros, os professores indicarão que os alunos elaborem dois problemas utilizando todas as frações escolhidas, com situações que possam ser facilmente observadas no cotidiano.

Em seguida, os professores solicitarão que cada grupo apresente as frações selecionadas e justifique os motivos da escolha.

Possíveis questionamentos com relação ao conteúdo:

1. Qual relação foi estabelecida para mudar a forma deste número?
2. Quais operações vocês relacionaram para resolver os problemas e transformar as frações em outras formas?

Após a discussão e o compartilhamento dos problemas criados, os professores apresentarão um jogo envolvendo porcentagens, frações e números decimais, com o objetivo de reforçar as representações de partes de um todo.

Parte 11 (Duração: 20 minutos) - Dominó de Porcentagem

Regras do Jogo

1. **Número de Jogadores:** 3
2. **Peças:** 28 (como um dominó tradicional, mas com porcentagens, frações e decimais em vez de números inteiros).
3. **Regras do Jogo:**

Distribuição das peças:

- Cada jogador recebe **7 peças** aleatórias.
- As 7 peças restantes ficam no *monte* (para compras).

Início do jogo:

- Quem tiver o **carretão mais alto (ex: 100% | 100%)** começa.
- Se ninguém tiver, o carretão seguinte (ex: 75% | 75%) inicia.

Jogadas:

- O primeiro jogador coloca sua bucha no centro.
- Os próximos devem conectar uma peça com um valor equivalente.

Ex: Se a peça na mesa for **[50% | X]**, você pode jogar uma peça com **50%** ou **1/2** (que é o mesmo valor).

- Se não tiver uma peça válida, **compra uma do monte**.
- Se não houver peças no monte, passa a vez.

4. **Objetivo:**

Ganha quem ficar sem peças primeiro.

- Se o jogo travar (ninguém puder jogar), vence quem tiver **a menor soma de porcentagens** nas peças restantes.

5. **Pontuação (opcional):**

- Os perdedores somam os valores de suas peças.
- Se um jogador vencer com peças sobrando nos outros, ele ganha pontos equivalentes à soma das peças adversárias.

Parte 12 (Duração: 10 minutos) – Resolução de exercícios e despedida

Os professores indicarão que os alunos iniciem a lista de exercícios para que possam tirar dúvidas em sala. Em seguida, agradecerão a presença de todos e entregarão um doce como forma de agradecimento e incentivo. Também reforçarão que o grupo no WhatsApp foi criado para o compartilhamento de resoluções e para que os estudantes possam tirar dúvidas.

Avaliação

Os alunos serão avaliados a partir da participação durante as atividades e a demonstração de compreensão referente ao conteúdo pela observação dos professores. Esta observação individual, torna possível visualizar e auxiliar cada aluno em suas dificuldades específicas, de forma que a aprendizagem ocorra num âmbito qualitativo.



1.2.2 Relatório

Iniciamos os preparativos da sala organizando as carteiras em grupos de seis participantes. O encontro contou com a presença de 38 estudantes, e nos surpreendeu o aumento considerável no número de alunos em comparação ao primeiro dia.

Iniciamos a aula às 8h com uma breve introdução sobre a história do origami, utilizando como material de apoio a tese “Construção do Conceito de Fração: Olhares Através da Dobradura”, de Cristina Mayumi Hamada, especificamente a seção presente na página 28, tópico 3.3.1. Essa introdução serviu para contextualizar a atividade que, em seguida, foi realizada pelos alunos. O conteúdo também foi complementado por slides que exibiam construções projetadas com base nos princípios da dobradura.

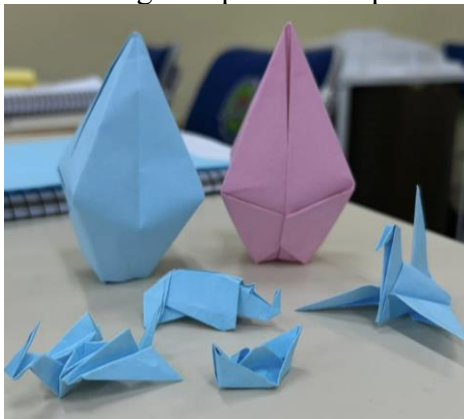
Em seguida, destacamos a relação entre o origami e a matemática, enfatizando que, ao dobrar o papel, é possível perceber as partes iguais de um todo, ou seja, as frações.

Na atividade de identificar as partes do quadrado, 98% dos alunos demonstraram grande interesse e proatividade, o que nos permitiu esclarecer dúvidas como: “*Posso dobrar o papel de qualquer forma e ainda assim obter partes iguais?*” e “*Isso é considerado uma fração?*”.

A tarefa de encontrar as frações do quadrado foi muito proveitosa, embora alguns alunos tenham apresentado mais facilidade que outros. Esse fato nos fez repensar a disposição dos grupos, já que a minoria que concluiu a atividade rapidamente mostrou certo desinteresse.

A atividade foi inspirada na dissertação de mestrado de Cristina Mayumi Hamada, defendida na UFFRJ, e teve como objetivo promover o raciocínio geométrico e a compreensão do conceito de fração de maneira visual e exploratória. Um momento especialmente marcante foi a observação feita por um dos alunos, que foi além do que constava na dissertação original. Ele conseguiu encontrar a fração $\frac{1}{3}$ no quadrado — uma divisão que exige mais abstração em comparação com frações com denominadores pares — e, a partir dessa descoberta, começou a investigar a divisão do quadrado em partes com denominadores ímpares, como $\frac{1}{5}$ e $\frac{1}{7}$.

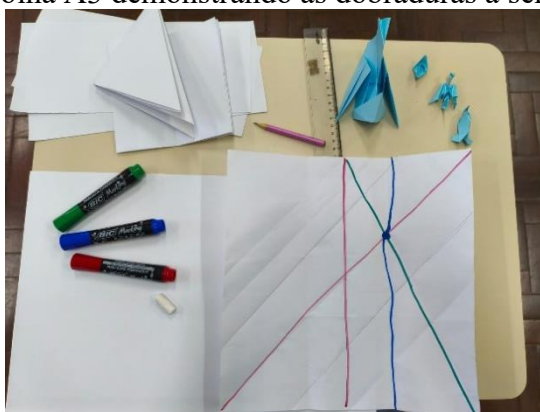
Alguns, após alcançarem o resultado esperado, animaram-se e demonstraram suas habilidades com origami, tornando a dinâmica mais interativa e produtiva. Esses aspectos foram observados enquanto circulávamos pela sala, sanando dúvidas que surgiam. O engajamento dos estudantes foi bastante satisfatório, as imagens a seguir mostram um pouco disso:

Figura 6 – Origamis produzidos pelos alunos

Fonte: elaborada pelos autores do presente documento

Figura 7 – Sala de aula

Fonte: elaborada pelos autores do presente documento

Figura 8 – Folha A3 demonstrando as dobraduras a serem realizadas

Fonte: elaborada pelos autores do presente documento

Após essa atividade, conforme previsto no plano de aula, exibimos trechos de um episódio do desenho *Cyberchase* com o objetivo de relacionar a comparação de frações com porcentagens. A turma reagiu de forma bastante positiva — alguns alunos já conheciam o desenho, enquanto outros o assistiam pela primeira vez, possivelmente sem ter percebido, anteriormente, a presença da Matemática no enredo.



Em seguida, realizamos a formalização do conteúdo e, à medida que fazíamos perguntas, muitos alunos utilizaram situações do episódio como exemplo, o que demonstra que acharam a proposta do desenho interessante.

Prosseguimos com a aula conforme o planejado, mas a etapa de formalização demandou mais tempo do que o previsto devido à dificuldade dos alunos em compreender as frações equivalentes. Esse imprevisto atrasou as atividades seguintes, afetando a execução da “atividade do varal”, que não pôde ser concluída em sala e acabou ficando um pouco confusa. Também não foi possível aplicar o “dominó das porcentagens”, mas essa atividade poderá ser facilmente trabalhada no próximo encontro.

Apesar das dificuldades, percebemos que todos demonstraram grande disposição para aprender.

1.2.3 Materiais utilizados

Atividades 17/05/2025

Atividade 1 - Como feito em sala com as outras frações, descubra como encontrar $\frac{1}{7}$ e $\frac{1}{9}$ do quadrado utilizando recortes e dobraduras.

- (UECE 2009- Adaptado)** Uma peça de tecido, após a lavagem, perdeu $\frac{1}{10}$ de seu comprimento e ficou medindo 36 metros. Nessas condições, qual o comprimento, em metros, da peça antes da lavagem?
- (PUC 2005)** Somando-se o número x a cada um dos termos da fração $\frac{4}{7}$, obtém-se 0,75. Pode-se afirmar que o valor de x é:
 - um número par.
 - um múltiplo de 10.
 - um número primo.
 - um divisor de 16.
- (ETEC/SP 2009 - Adaptado)** Tradicionalmente, os paulistas costumam comer pizza nos finais de semana. A família de João, composta por ele, sua esposa e seus filhos, comprou uma pizza tamanho gigante cortada em 20 pedaços iguais. Sabe-se que João comeu $\frac{3}{12}$ e sua esposa comeu $\frac{2}{5}$. Quantos pedaços sobraram para seus filhos?
- (ENEM 2021 – Adaptado)** - Antônio, Joaquim e José são sócios de uma empresa cujo capital é dividido, entre os três, em partes proporcionais a: 4, 6 e 6, respectivamente. Com a intenção de igualar a participação dos três sócios no capital da empresa, Antônio pretende adquirir uma fração do capital de cada um dos outros dois sócios. Qual é a fração do capital de cada sócio que Antônio deverá adquirir?
- (UFMG-2009)** Paula comprou dois potes de sorvete, ambos com a mesma quantidade do produto. Um dos potes continha quantidades iguais dos sabores chocolate, creme e



morango; e o outro, quantidades iguais dos sabores chocolate e baunilha. Então, é CORRETO afirmar que, nessa compra, a fração correspondente à quantidade de sorvete do sabor chocolate foi:

(a) $\frac{5}{12}$

(b) $\frac{2}{5}$

(c) $\frac{3}{5}$

(d) $\frac{5}{6}$

6. (Unesp-1994) Duas empreiteiras farão conjuntamente a pavimentação de uma estrada, cada uma trabalhando a partir de uma das extremidades. Se uma delas pavimentar $\frac{2}{5}$ da estrada e a outra os 81 km restantes, a extensão dessa estrada é de:

(a) 125km

(b) 135km

(c) 142km

(d) 145km

(e) 160 km

Respostas:

1 – 40m; 2 – c; 3 - 7; 4 - c; 5 – a; 6 – b

SLIDES

Figura 9 – Slides 17/05/2025



Fonte: elaborada pelos autores do presente documento



1.3 Encontro 3 – 24/05/2025

1.3.1 Plano de Aula

Público-alvo: Alunos do Ensino Médio e ingressantes do Ensino Superior.

Professores: Letícia Gabryela Cordeiro Lang, Ana Cecília dos Santos Maciel e Felipe Cesar Muller Rio Branco.

Objetivo geral:

- Explorar temas que possibilitem uma interpretação e visualização dos conceitos de razão e proporção forma implícita.
- Relacionar situações a seus conceitos matemáticos à suas aplicabilidades.

Objetivos específicos:

- Identificar frações em diferentes contextos.
- Comparar grandezas usando razões.
- Reconhecer proporções como igualdades entre razões.
- Verificar se frações e razões são equivalentes.
- Resolver problemas com frações, razões e proporções.
- Explicar os próprios raciocínios matemáticos.

Conteúdos: Proporcionalidade, razão e igualdade.

Tempo de execução:

1 encontro com duração de 4 horas aula.

Recursos didáticos:

Quadro, giz, atividades impressas, fitas métricas (para medir), lápis, borracha, dominó, projetor, notebook.

Parte 1 (Duração: 35 minutos) – Organização dos grupos e dominó de razão

Os alunos entrarão na sala, que estará dividida em grupos de 6 pessoas. Todos receberão a folha de atividades para iniciarmos a aula.

No primeiro momento, os professores retomarão a atividade do dominó planejada para a aula anterior, que não foi realizada por falta de tempo, mas que permanece relacionada ao conteúdo atual.

Tabela 5 – Materiais e regras do dominó

Dominó de Razão - Regras do Jogo
1. Materiais:

- **Número de Jogadores:** 3
 - **Peças:** 28 (como um dominó tradicional, mas com porcentagens, frações e decimais em vez de números inteiros).
2. **Regras do Jogo:**
- **Distribuição das peças:**
 - Cada jogador recebe **7 peças** aleatórias.
 - As 7 peças restantes ficam no *monte* (para compras).
3. **Início do jogo:**
- Quem tiver o carretão mais alto (Ex.: 100% | 100%) começa.
 - Se ninguém tiver, o carretão seguinte (Ex.: 75% | 75%) inicia.
4. **Jogadas:**
- O primeiro jogador coloca seu carretão no centro.
 - Os próximos devem conectar uma peça com um valor equivalente.
 - Ex.: Se a peça na mesa for [50% | X], você pode jogar uma peça com **50%** ou $\frac{1}{2}$ (que é o mesmo valor).
 - Se não tiver uma peça válida, **compra uma do monte**.
 - Se não houver peças no monte, passa a vez.
5. **Objetivo:**
- Ganha quem ficar sem peças primeiro.
 - Se o jogo travar (ninguém puder jogar), vence quem tiver **a menor soma de porcentagens** nas peças restantes.

Fonte: elaborada pelos autores do presente documento

Parte 2 (Duração: 30 minutos) – Atividade exploratória sobre proporcionalidade

Razões entre medidas das partes do corpo humano

A aula começará com uma atividade exploratória sobre o número de ouro, cujo objetivo será compreender sua origem, como é calculado e como se manifesta em diferentes áreas do conhecimento.

Serão propostas atividades práticas, como a medição de proporções faciais e a construção de retângulos áureos. Para isso, os professores demonstrarão como as medições



deverão ser realizadas e indicarão aos alunos quais medidas deverão ser registradas, conforme as orientações contidas na folha de atividades.

Tabela 6 – Atividade para formalização do conteúdo dos conjuntos numéricos

Parte maior do corpo (<i>PM</i>)	Parte menor do corpo (<i>pm</i>)	Medida da parte do corpo		$\frac{PM}{pm}$
		(<i>PM</i>)	(<i>pm</i>)	
Altura total	Do umbigo até o chão			
Braço inteiro	Cotovelo até a ponta do dedo médio			
Qualquer dedo inteiro	Dobra central até a ponta (mesmo dedo)			
Perna inteira	Joelho até o chão			
Cotovelo até o pulso	Comprimento do pé			

Fonte: elaborada pelos autores do presente documento

Os professores iniciarão o momento de análise questionando a turma: "O que vocês perceberam?"

Em seguida, demonstrarão como utilizar as medidas obtidas, orientando os alunos a dividirem a maior medida pela menor. Os alunos compararão os resultados dessas divisões, e será esperado que identifiquem padrões e discutam o que pode ser observado a partir dos valores obtidos.

Posteriormente, os professores apresentarão o número de ouro como uma representação que evidencia a ideia de proporcionalidade.

Parte 3 (Duração: 20 minutos) – Formalização da Razão Áurea

- **O que é o número de ouro?**

Os professores explicarão que o número de ouro, também conhecido como Razão Áurea, é uma constante irracional presente em diversos contextos. Na matemática, também recebe os nomes de razão de ouro, divina proporção, entre outros.

Será apresentado o número Φ (fi), cuja razão resulta em uma aproximação de 1,618. Essa constante é representada pela expressão: $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,6180339 \dots\right)$.

- **Origem histórica:**

Os professores mencionarão que o conceito de proporção áurea foi estudado por matemáticos gregos, como Euclides, e que a letra grega phi (Φ) é utilizada para representá-lo. A história deste número enigmático e místico aparece desde a antiguidade. No Egito, há suspeitas que a “Grande Pirâmide”, fosse construída tendo em conta a Razão Áurea,

Para complementar a apresentação do número de ouro, serão mostrados os exemplos da proporção áurea em formato de imagem nos *slides*, complementando com as seguintes explicações;

1. Observando a natureza:

É possível observar em diferentes espécies de plantas e flores algumas formas geométricas assim como a forma das conchas. É o caso das maçãs e peras, que quando cortadas no sentido de suas circunferências, revelam formas de estrelas de cinco pontas na estrutura de suas sementes.

- Folhas de samambaias
- Couve-flor romanesco
- Árvores e raízes
- Cristais de gelo
- Vasos sanguíneos
- Pulmões
- Neurônios (redes neurais)
- Conchas marinhas (espiral logarítmica)

2. Observando a arte e arquitetura:

Obras de arte de artistas como Leonardo da Vinci, apresentam o uso da proporção áurea.

- Mona Lisa e Homem Vitruviano (Leonardo da Vinci)
- A Última Ceia (Salvador Dalí)
- David (Michelangelo)
- Padrões decorativos
- Estruturas inspiradas em fractais (como o Museu Guggenheim em Bilbao)
- Partenon de Atenas
- Catedrais Góticas
- Le Corbusier aplicou a proporção no Modulor

3. Observando a fotografia:

As razões e proporções também podem ser vistas nas fotografias, onde imagens consideradas belas e “perfeitas” como as que utilizam:

- Regra dos Terços
- Beethoven e Mozart dividiam movimentos em seções proporcionais a ϕ .

4. Sequência de Fibonacci:



Leonardo de Pisa, conhecido como Fibonacci, matemático italiano do século XIII, considerado um dos mais importantes da Idade Média. Durante a explicação, os professores vão citar o livro que ele escreveu em 1202, chamado Liber Abaci.

Discussão e conclusão:

Discutiremos como o número de ouro é uma constante matemática que aparece em diversos contextos, tanto na natureza como na arte e arquitetura.

INTERVALO: 09h40min – 10h (20 minutos)

Parte 4 (Duração: 30 minutos) – Apresentação dos vídeos

Dois vídeos serão apresentados após todas as mostras serem feitas: Donald no mundo da Matemática e Número de ouro.

Parte 5 (Duração: 30 minutos) – Formalização do conteúdo

A seguir, serão conceituados:

Propriedades da proporção

1º Propriedade: Em uma proporção, a soma dos dois primeiros termos está para o 2º (ou 1º) termo, assim como a soma dos dois últimos está para o 4º (ou 3º).

Demonstração: Considere as proporções:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Adicionando 1 a cada membro da primeira proporção, obtemos:

$$\frac{a}{b} + 1 = \frac{c}{d} + 1$$

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{b} = \frac{c}{d} + \frac{d}{d}$$

$$\frac{a + b}{b} = \frac{c + d}{d}$$

2º Propriedade: Em uma proporção, a diferença dos dois primeiros termos está para o 2º (ou 1º) termo, assim como a diferença dos dois últimos está para o 4º (ou 3º).

Demonstração: Considere as proporções:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Adicionando 1 a cada membro da primeira proporção, obtemos:

$$\frac{a}{b} - 1 = \frac{c}{d} - 1$$

$$\frac{a}{b} - \frac{b}{b} = \frac{c}{d} - \frac{d}{d}$$

$$\frac{a - b}{b} = \frac{c - d}{d}$$

3º Propriedade: em uma proporção, a soma dos antecedentes está para a soma dos consequentes, assim como cada antecedente está para o seu consequente.

Demonstração: Considere as proporções:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Permutando os meios, temos:

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$$

Aplicando a 1ª propriedade, obtemos:

$$\frac{a + c}{c} = \frac{b + d}{d}$$

Permutando os meios, finalmente obtemos:

$$\frac{a + c}{b + d} = \frac{c}{d} = \frac{a}{b}$$

4º Propriedade: Em uma proporção, a diferença dos antecedentes está para a diferença dos consequentes, assim como cada antecedente está para o seu consequente.

Demonstração: Considere as proporções:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Permutando os meios, temos:

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$$

Aplicando a 2ª propriedade, obtemos:

$$\frac{a - c}{c} = \frac{b - d}{d}$$

Permutando os meios, finalmente obtemos:

$$\frac{a - c}{b - d} = \frac{c}{d} = \frac{a}{b}$$

Regra de Três

Simplex e diretamente proporcional:



Quando duas grandezas são diretamente proporcionais, ou seja, se uma aumenta, a outra também aumenta na mesma proporção, e vice-versa.

$$\frac{A1}{B1} = \frac{A2}{B2}$$

Exemplo:

Se 2 pães custam R\$ 10, quanto custam 5 pães?

$$\frac{2 \text{ pães}}{10 \text{ reais}} = \frac{5 \text{ pães}}{x}$$

$$2x = 50 \Rightarrow x = 25 \text{ reais}$$

Simple e inversamente proporcional:

Quando duas grandezas são inversamente proporcionais, ou seja, se uma aumenta, a outra diminui na mesma proporção, e vice-versa.

$$A1 \times B1 = A2 \times B2$$

Exemplo:

Se 6 pedreiros constroem um muro em 12 dias, quanto tempo levam 4 pedreiros?

$$6 \text{ pedreiros} \cdot 12 \text{ dias} = 4 \text{ pedreiros} \cdot x$$

$$72 = 4x \Rightarrow x = 18 \text{ dias}$$

Parte 6 (Duração: 40 minutos) – Execução das atividades

Após a formalização, o tempo restante será destinado à resolução das demais atividades da lista, incluindo a cruzadinha, cujas respostas são:

Horizontal

2. Igualdade que contém uma incógnita (Equação)
3. Operação que separa um total em partes (Divisão)
8. Análise de semelhanças e diferenças (Comparação)
9. Operação que encontra o produto (Multiplicação)

Vertical

1. Pode referir-se à relação das partes separadas do todo (Proporcional)
4. Representação visual de dados (Gráfico)
5. Base de medida em um sistema qualquer (Unidade)
6. Igualdade entre duas razões (Proporção)
7. Representação de partes de um todo (Fração)

10. Conexão entre duas ou mais variáveis (Relação)
11. Processo de resolver problemas matemáticos (Cálculo)
11. Valor fixo em uma expressão matemática (Constante)
12. Relação entre medidas reais e representadas (Escala)
13. Operação que junta quantidades (Soma)

Além disso, os alunos serão convidados a ir até o quadro para resolver os exercícios e explicar os passos que seguiram até a resolução.

Parte 7 (Duração: 5 minutos) – Despedida

Em seguida, agradecerão a presença de todos e entregarão um doce como forma de agradecimento e incentivo. Também reforçarão que o grupo no WhatsApp foi criado para o compartilhamento de resoluções e para que os estudantes possam tirar dúvidas.

Avaliação

Os alunos serão avaliados a partir da participação durante as atividades e a demonstração de compreensão referente ao conteúdo pela observação dos professores. Esta observação individual, torna possível visualizar e auxiliar cada aluno em suas dificuldades específicas, de forma que a aprendizagem ocorra num âmbito qualitativo.



1.3.2 Relatório

Iniciamos a aula observando uma diminuição significativa no número de alunos presentes em comparação ao encontro anterior. Nesta aula, contamos com a participação de 30 alunos, um número consideravelmente inferior ao do segundo dia, quando houve a presença de 38 estudantes. Atribuímos essa redução às baixas temperaturas registradas no dia.

A primeira atividade desenvolvida foi o Dominó das Frações, proposta que havia sido planejada para a aula anterior, mas que não pôde ser aplicada por falta de tempo. O jogo segue a mesma lógica de um dominó tradicional, porém, com o objetivo de levar os alunos a compararem diferentes representações numéricas — frações, decimais e porcentagens — identificando se os valores são maiores ou menores, e se encaixam entre si.

Cada aluno recebeu 7 peças, de um total de 21. As partidas foram organizadas com três jogadores por mesa, o que inviabilizou a realização de “compras”. As peças do dominó foram elaboradas com representações variadas: forma fracionária, decimal, por extenso e em porcentagem.

De modo geral, os alunos conseguiram desenvolver a atividade com facilidade. Algumas dúvidas pontuais surgiram, como a relação entre 0,73 e 73%, mas foram esclarecidas individualmente pelos professores, que circularam entre as mesas para acompanhar o progresso dos grupos.

Na sequência, foram entregues as folhas com a atividade de medição corporal, na qual os alunos deveriam medir partes específicas do corpo conforme as instruções. Durante essa etapa, observamos que alguns estudantes apresentaram dificuldade no manuseio da trena, especialmente para imobilizá-la corretamente e identificar o ponto de início da medição. Os professores auxiliaram os alunos individualmente, demonstrando como travar a trena e manuseá-la de forma adequada para que pudessem realizar as medições com maior autonomia.

Após as medições, iniciamos uma discussão coletiva sobre as razões obtidas. Muitos alunos relataram que os valores encontrados estavam próximos de 1,6 a 1,7, o que abriu espaço para introduzirmos o conceito de razão áurea. Nesse momento, apresentamos os *slides* explicativos, destacando como esse número especial — aproximadamente 1,618 — aparece em diferentes contextos: na natureza, na arte, em fotografias, no corpo humano, na arquitetura, em galáxias, entre outros.

Além disso, foi realizada a resolução do problema dos coelhos, de Fibonacci, em conjunto com a turma. A partir dos números obtidos na sequência, calculamos juntos as razões

entre os valores, observando que essas razões também se aproximavam de 1,618. Assim, foi possível estabelecer a conexão entre a sequência de Fibonacci e a razão áurea.

Dando continuidade à proposta didática, exibimos o vídeo “*Donald no País da Matemática*”, que apresenta de forma reflexiva a presença da razão áurea no cotidiano.

Como ainda havia tempo antes do intervalo, os alunos foram convidados a resolver a cruzadinha presente na lista de atividades. Essa atividade teve como objetivo a fixação dos conteúdos abordados de maneira leve e interativa. Além disso, serviu como uma estratégia para manter a turma no mesmo ritmo, considerando que alguns alunos apresentam um avanço maior em relação aos colegas — com a cruzadinha, conseguimos equilibrar o andamento da aula e garantir que todos acompanhassem o mesmo caminho.

Após o intervalo, encerramos a aula com a exibição de um segundo vídeo, desta vez sobre o número de ouro. O material abordava a origem dos estudos sobre esse número e destacava suas aplicações em diferentes contextos da vida real. A reação dos alunos foi bastante positiva — em alguns momentos, ouvimos até suspiros de surpresa, demonstrando o quanto ficaram impressionados com o conteúdo apresentado.



1.3.3 Materiais utilizados

Atividades 24/05/2025

Atividade 1 - Nesta atividade, você irá medir diferentes partes do seu corpo com o auxílio de uma fita métrica. Compare essas medidas e calcule a razão entre elas.

Parte maior do corpo (<i>PM</i>)	Parte menor do corpo (<i>pm</i>)	Medida da parte do corpo		$\frac{PM}{pm}$
		(<i>PM</i>)	(<i>pm</i>)	
Altura total	Do umbigo até o chão			
Braço inteiro	Cotovelo até a ponta do dedo médio			
Qualquer dedo inteiro	Dobra central até a ponta (mesmo dedo)			
Ombro até a ponta do dedo médio	Cotovelo até a ponta do dedo médio			
Perna inteira	Joelho até o chão			
Cotovelo até o pulso	Comprimento do pé			

Atividade 2 – Problema dos coelhos (Fibonacci)

Quantos pares de coelhos poderão ser gerados, ao final de um ano, a partir de um único casal, considerando as seguintes condições:

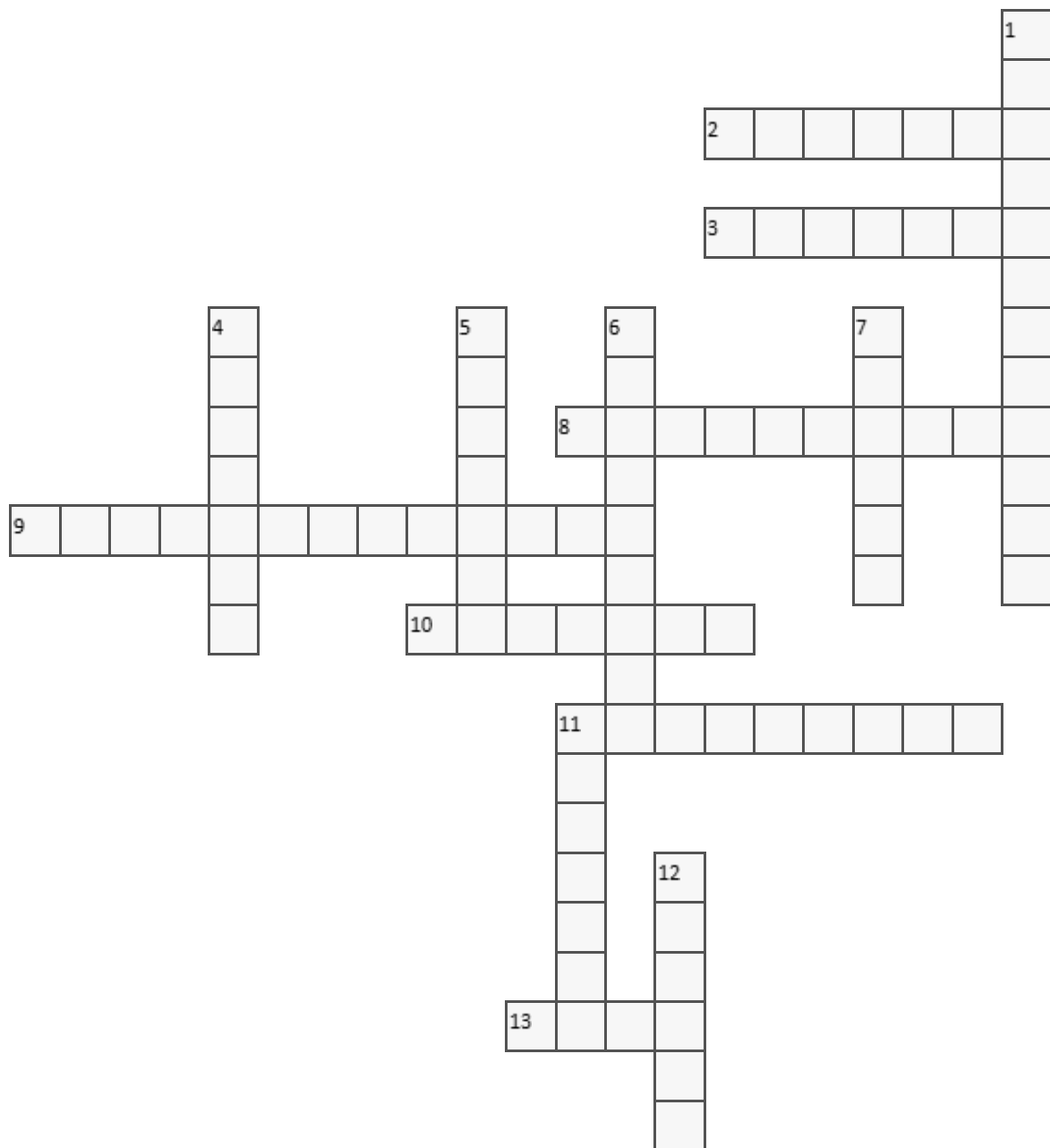
1. No primeiro mês, há apenas um casal.
2. Cada casal passa a se reproduzir a partir do segundo mês de vida.
3. Não há problemas genéticos no cruzamento consanguíneo;
4. Todo casal fértil gera um novo casal a cada mês.
5. Nenhum coelho morre.

Atividade 3 – Cruzadinha**Horizontal**

2. Igualdade que contém uma incógnita
3. Operação que separa um total em partes
8. Análise de semelhanças e diferenças
9. Operação que encontra o produto
10. Conexão entre duas ou mais variáveis
11. Valor fixo em uma expressão matemática
13. Operação que junta quantidades

Vertical

1. Pode referir-se à relação das partes separadas do todo
4. Representação visual de dados
5. Base de medida em um sistema qualquer
6. Igualdade entre duas razões
7. Representação de partes de um todo
11. Processo de resolver problemas matemáticos
12. Relação entre medidas reais e representadas



Atividade 4 - Dada a propriedade: A soma dos dois primeiros termos está para o 2º termo, assim como a soma dos dois últimos está para o 4º termo, calcule:

- Dada a proporção $\frac{4}{7} = \frac{12}{x}$, encontre x usando a propriedade.
- Na proporção $\frac{5}{9} = \frac{15}{y}$, determine y aplicando a propriedade.
- Se $\frac{2}{3} = \frac{10}{z}$, calcule z usando a propriedade da proporção.

Atividade 5 - Dada a propriedade: Em uma proporção, a diferença dos dois primeiros termos está para o 2º (ou 1º) termo, assim como a diferença dos dois últimos está para o 4º (ou 3º), calcule:

- a) Dada $\frac{5}{2} = \frac{15}{6}$, verifique a propriedade da diferença.
- b) Se $\frac{x}{4} = \frac{9}{12}$, encontre x usando a diferença.
- c) Se $\frac{a-b}{b} = \frac{4}{5}$ e $a = 27$, encontre b.

Atividade 6 - Dada a propriedade: Em uma proporção, a soma dos antecedentes está para a soma dos consequentes, assim como cada antecedente está para o seu consequente, calcule:

- a) Dada a proporção $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$, verifique a propriedade.
- b) Dada $\frac{k}{6} = \frac{15}{10}$, encontre k.
- c) Se $\frac{m}{n} = \frac{3}{5}$ e $m + n = 40$, encontre m e n.

Atividade 7 - Dada a propriedade: Em uma proporção, a diferença dos antecedentes está para a diferença dos consequentes, assim como cada antecedente está para o seu consequente, calcule:

- a) Dada $\frac{4}{5} = \frac{8}{10}$, verifique a propriedade da diferença.
- b) Se $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{2}{3}$ e $a - c = 4$, calcule $b - d$.
- c) Na proporção $\frac{x-y}{x+y} = \frac{2}{7}$, encontre $\frac{x}{y}$.

Atividade 8 - Para alimentar o seu cão, uma pessoa gasta 10 kg de ração a cada 15 dias. Qual a quantidade total de ração consumida por semana, considerando que por dia é sempre colocada a mesma quantidade de ração?

Atividade 9 - Uma torneira enche um tanque em 6 h. Quanto tempo o mesmo tanque levará para encher, se forem utilizadas 4 torneiras com a mesma vazão da torneira anterior?



Atividade 10 - Um carro percorre 240 km em 3 horas. Quantos quilômetros percorrerá em 7 horas com a mesma velocidade?

Atividade 11 - Um ciclista percorre um trajeto a 20 km/h e leva 6 horas. Se aumentar a velocidade para 30 km/h, quanto tempo economizará?

Atividades Extras

- 1. (Enem 2023)** O metrô de um município oferece dois tipos de tíquetes com colorações diferentes, azul e vermelha, sendo vendidos em cartelas, cada qual com nove tíquetes da mesma cor e mesmo valor unitário. Duas cartelas de tíquetes azuis e uma cartela de tíquetes vermelhos são vendidas por R\$ 32,40. Sabe-se que o preço de um tíquete azul menos o preço de um tíquete vermelho é igual ao preço de um tíquete vermelho mais cinco centavos. Qual o preço, em real, de uma cartela de tíquetes vermelhos?
- 2. (Enem 2014 – Adaptado)** Uma pessoa compra semanalmente, numa mesma loja, sempre a mesma quantidade de um produto que custa R\$ 10,00 a unidade. Como já sabe quanto deve gastar, leva sempre R\$ 6,00 a mais do que a quantia necessária para comprar tal quantidade, para o caso de eventuais despesas extras. Entretanto, um dia, ao chegar à loja, foi informada de que o preço daquele produto havia aumentado 20%. Devido a esse reajuste, concluiu que o dinheiro levado era a quantia exata para comprar duas unidades a menos em relação à quantidade habitualmente comprada. Qual a quantia que essa pessoa levava semanalmente para fazer a compra?
- 3. (Enem 2013- Adaptado)** Para aumentar as vendas no início do ano, uma loja de departamentos remarcou os preços de seus produtos 20% abaixo do preço original. Quando chegam ao caixa, os clientes que possuem o cartão fidelidade da loja têm direito a um desconto adicional de 10% sobre o valor total de suas compras.

Um cliente deseja comprar um produto que custava R\$ 50,00 antes da remarcação de preços. Ele não possui o cartão fidelidade da loja. Caso esse cliente possuísse o cartão fidelidade da loja, a economia adicional que obteria ao efetuar a compra, em reais, seria de?

4. (Enem 2013) A figura apresenta dois mapas, em que o estado do Rio de Janeiro é visto em diferentes escalas.



Há interesse em estimar o número de vezes que foi ampliada a área correspondente a esse estado no mapa do Brasil. Esse número é:

- (a) menor que 10.
 - (b) maior que 10 e menor que 20.
 - (c) maior que 20 e menor que 30.
 - (d) maior que 30 e menor que 40.
 - (e) maior que 40.
5. (Enem 2016 - Adaptado) Um paciente necessita de reidratação endovenosa feita por meio de cinco frascos de soro durante 24 h. Cada frasco tem um volume de 800ml de soro. Nas primeiras quatro horas, deverá receber 40% do total a ser aplicado. Cada mililitro de soro corresponde a 12 gotas. O número de gotas por minuto que o paciente deverá receber após as quatro primeiras horas será?

Respostas: 1 - R\$ 6,30; 2 - R\$ 156,00; 3 - R\$ 4,00; 4 - D; 5 - 24;



SLIDES

Figura 10 – Slides de 24/05/2025

Proporção Áurea

Homem vitruviano

Na Arte

ONDE AS PROPORÇÕES PODEM SER VISTAS?

ONDE AS PROPORÇÕES PODEM SER VISTAS?		
Natureza <ul style="list-style-type: none">• Sequência de Fibonacci• Folhas de samambaias• Couve-flor romanesco• Árvores e raízes• Cristais de gelo• Vasos sanguíneos• Pulmões• Neurônios (redes neurais)• Conchas marinhas (espiral logarítmica)	Artes <ul style="list-style-type: none">• Mona Lisa e Homem Vitruviano (Leonardo da Vinci)• A Última Ceia (Salvador Dalí)• David (Michelangelo)• Padrões decorativos• Estruturas inspiradas em fractais (como o Museu Guggenheim em Bilbao)	Arquitetura <ul style="list-style-type: none">• Partenon de Atenas• Catedrais Góticas Fotografia e Música <ul style="list-style-type: none">• Regra dos Terços• Beethoven e Mozart dividiam movimentos em seções proporcionais a ϕ.

Concha do polvo Nautilus

Sequência de Fibonacci

A sequência de Fibonacci foi apresentada pelo italiano Leonardo de Pisa, conhecido como Fibonacci.

Em 1202, ele publicou o livro Liber Abaci, no qual apresentou o famoso problema dos coelhos:

"Quantos pares de coelhos se formam em um ano, começando com um único par, se a cada mês cada par gera um novo par a partir do segundo mês?"

Na Fotografia

Vídeos

- [Razão Áurea – Pato Donald](#)
- [Número de ouro](#)

Fonte: elaborada pelos autores do presente documento

1.4 Encontro 4 – 31/05/2025

1.4.1 Plano de Aula

Público-alvo: Alunos do Ensino Médio e ingressantes do Ensino Superior.

Professores: Letícia Gabryela Cordeiro Lang, Ana Cecília dos Santos Maciel e Felipe Cesar Muller Rio Branco.

Objetivo geral:

- Desenvolver a capacidade de identificação e análise dos elementos fundamentais de polígonos (lados, vértices e ângulos internos).
- Estimular a compreensão das propriedades geométricas de figuras planas (quadrados, retângulos, hexágonos e outras).
- Explicar os próprios raciocínios matemáticos.

Objetivos específicos:

- Identificar e classificar diferentes tipos de polígonos, como triângulos, quadrados, retângulos e hexágonos.
- Compreender as propriedades dos polígonos, incluindo ângulos, lados e perímetro.
- Desenvolver habilidades práticas ao desenhar polígonos e calcular suas áreas.
- Relacionar os conceitos de polígonos com situações do dia a dia e com outras áreas do conhecimento, como arte e arquitetura.
- Resolver problemas com figuras geométricas.
- Compreender e aplicar fórmulas para calcular a área de diferentes polígonos (paralelogramo, triângulo, trapézio e losango) utilizando materiais manipuláveis.

Conteúdos: Polígonos.

Tempo de execução:

1 encontro com duração de 4 horas aula.

Recursos didáticos:

Quadro, giz, atividades impressas, lápis, borracha, material dos polígonos, projetor, notebook, kit pedagógico contendo peças geométricas em EVA³ representando os polígonos em estudo, superfície plana para composição das figuras (mesa).

³ O EVA (Etileno-Vinil Acetato) é um material termoplástico produzido pela copolimerização de etileno e acetato de vinila. Apresenta flexibilidade, leveza, boa resistência ao impacto e impermeabilidade. Por essas propriedades, é amplamente utilizado em solados de calçados, brinquedos, placas expandidas, materiais esportivos e artesanato.



Parte 1 (Duração: 10 minutos) – Organização da sala e dos grupos

Os alunos entrarão na sala, que estará dividida em grupos de 6 pessoas. Após os professores iniciarem a aula, todos receberão a folha de atividades.

Parte 2 (Duração: 50 minutos) – Formalização dos conceitos necessários para introdução de polígonos

No primeiro momento, os professores iniciarão a aula de forma expositiva, com a participação dos alunos de forma menos ativa e direcionada. Nesta parte, serão apresentados os conceitos iniciais de geometria de forma breve através de *slides*.

Conceitos a serem apresentados:

Ponto: Objeto geométrico sem dimensão, apenas com posição definida no espaço. Intersecção entre duas retas ou segmentos de reta.

Reta: Conjunto infinito de pontos alinhados que se estende infinitamente em ambas as direções. É unidimensional e não possui espessura.

Semirreta: Parte da reta limitada por um ponto inicial, estendendo-se infinitamente apenas em uma direção e sentido.

Segmento de reta: Parte da reta delimitada por dois pontos distintos, contendo todos os pontos entre eles. Pode ser medido. É sugerido pelo comprimento e largura da sala, de uma carteira de uma janela...

Vértice: corresponde ao ponto de encontro dos segmentos que formam o polígono.

Lado: corresponde a cada segmentos de reta que une vértices consecutivos.

Ângulo: Chamamos de ângulo a figura formada por duas semirretas com a mesma origem.

- Os **ângulos internos** correspondem aos ângulos formados por dois lados consecutivos. Por outro lado,
- Os **ângulos externos** são os ângulos formados por um lado e pelo prolongamento do lado sucessivo a ele.

Diagonal: é o segmento de reta que liga dois vértices não consecutivos de um polígono, ou seja, que não estão lado a lado. Esse segmento atravessa o interior da figura, conectando pontos não adjacentes.

Polígono: Figura plana e fechada constituída por segmentos de reta. Por isso, não há curvas em um polígono.

O estudo deles pertence à geometria plana.

1º Classificações: É muito usual classificá-los quanto ao número de lados. Por exemplo, todo polígono com três lados é classificado como triângulo, enquanto todo com quatro lados, como quadrilátero.

2º Polígono convexo e côncavo: Se todos os ângulos internos forem inferiores a 180° então ele é convexo, caso contrário, se pelo menos um ângulo for superior a 180° , o polígono é côncavo.

3º Polígonos regulares: São aqueles que têm todos os lados e ângulos congruentes.

Após a conceitualização dos termos, os alunos preencherão a Atividade 1 da folha de exercícios, que apresenta diferentes polígonos e solicita que identifiquem o número de lados, vértices e ângulos internos de cada figura. Durante esse tempo os professores circularão pelos grupos esclarecendo possíveis dúvidas surgidas.

Parte 3 (Duração: 25 minutos) – Atividades sobre perímetro de polígonos

Serão apresentadas as atividades, iniciando pelos exercícios mais simples evoluindo para os mais complexos, seguindo a folha de atividades.

Parte 4 (Duração: 15 minutos) – Atividade Do passo a passo do esboço do Polígonos

Em duplas, cada aluno irá desenhar, de forma individual, uma figura geométrica na malha quadriculada da sua folha. Depois, deverá pensar e anotar o passo a passo necessário para que outra pessoa consiga reproduzir esse desenho, apenas ouvindo as instruções. Em seguida, um aluno ditará suas instruções e o outro tentará reproduzir o desenho, sem ver o original. Depois, o segundo aluno dita as instruções do seu desenho, e o colega tenta reproduzi-lo. Ao final, os desenhos serão comparados e discutiremos as semelhanças, diferenças, além das dificuldades na comunicação.

INTERVALO: 09h40min – 10h (20 minutos)

Parte 5 (Duração: 60 minutos) – Atividade exploratória sobre área dos polígonos

Nesta etapa, os alunos serão conduzidos a uma atividade prática voltada à dedução das fórmulas de área das principais figuras geométricas planas. Será utilizado um jogo educativo composto por 14 peças geométricas coloridas produzidas em EVA, que representam diferentes tipos de triângulos, trapézios (isósceles, escaleno e retângulo), retângulo, paralelogramo e



losango. A proposta consiste em manipular essas peças de modo a estabelecer relações entre as figuras, sempre em referência à área do retângulo como base de comparação.

- **Do Retângulo ao Paralelogramo**

A atividade terá início com a composição de um retângulo, seguida da reorganização das peças para formar um paralelogramo, mantendo as medidas de base e altura. A expectativa é que os alunos reconheçam a equivalência de área entre essas figuras e deduzam, a partir disso, a fórmula da área do paralelogramo:

$$A_{\text{paralelogramo}} = \text{base} \times \text{altura}$$

- **Triângulo**

Na sequência, serão utilizados triângulos congruentes para formar paralelogramos. A partir dessa construção, espera-se que os alunos compreendam que a área do triângulo corresponde à metade da área do paralelogramo formado, chegando à fórmula:

$$A_{\text{triângulo}} = \frac{b \times h}{2}$$

O professor deverá destacar que essa relação é válida para quaisquer tipos de triângulo.

- **Trapézio**

Com relação ao trapézio, os alunos trabalharão com duas peças congruentes para formar um paralelogramo. A observação da base formada por $(B + b)$ deverá conduzi-los à dedução da fórmula da área do trapézio:

$$A_{\text{trapézio}} = (B + b) \times \frac{h}{2}$$

Neste momento, os professores terão o papel de orientar na identificação das bases maior e menor e da altura.

- **Losango**

Por fim, para o losango, os alunos utilizarão peças que representem suas diagonais. Através da decomposição e recomposição da figura, espera-se que percebam que a área do losango pode ser expressa como:

$$A_{\text{losango}} = \frac{D \times d}{2}$$

Parte 6 (Duração: 20 minutos) – Formalização da Área dos Polígonos a partir do encontrado pelos alunos

Após todos os alunos terem concluído a atividade, os professores exporão as fórmulas dos polígonos como os alunos as encontraram, fazendo observações para enriquecer a atividade.

Parte 7 (Duração: 15 minutos) – Execução das atividades

Após a finalização da formalização, caso haja tempo disponível, prosseguiremos com a resolução das atividades restantes de vestibulares constantes na folha de exercícios.

Parte 8 (Duração: 5 minutos) – Despedida

Em sequência, os professores agradecerão a presença de todos, entregamos um doce como forma de agradecimento e incentivo, pedirão ajuda para organizar a sala novamente e reforçarão que o grupo do Whatsapp foi criado para compartilharem as resoluções e os estudantes tirarem suas dúvidas.

Avaliação

Os alunos serão avaliados a partir da participação durante as atividades e a demonstração de compreensão referente ao conteúdo pela observação dos professores. Esta observação individual, torna possível visualizar e auxiliar cada aluno em suas dificuldades específicas, de forma que a aprendizagem ocorra num âmbito qualitativo.



1.4.2 Relatório

As carteiras foram organizadas em grupos de seis para facilitar o trabalho em equipe. Nesta aula, estiveram presentes 23 alunos, número inferior ao registrado no terceiro encontro, possivelmente em razão do frio.

Iniciamos a aula com a exploração dialogada dos conceitos de ponto, reta, semirreta e segmento de reta. Fizemos perguntas como “Quantos pontos tem uma reta?”, “Uma semirreta?” e “Um segmento?”, e os alunos responderam que todos têm infinitos pontos. Aproveitamos para comentar sobre a existência de infinitos de diferentes tamanhos.

Em seguida, introduzimos os conceitos de vértices, arestas e ângulos. Os alunos realizaram a Atividade 1 da folha de exercícios, que envolvia contar vértices, lados e ângulos internos em diferentes polígonos. Alguns demonstraram dificuldade em identificar os ângulos em polígonos côncavos, especialmente aqueles maiores que 180° , o que gerou dúvidas sobre o que caracteriza um ângulo. As dúvidas foram resolvidas durante a atividade, com explicações dos professores em cada grupo. Alguns alunos apresentaram suas respostas na lousa. No entanto, houve um descompasso, pois, alguns alunos passaram para as próximas atividades antes da turma finalizar a primeira, visto que em nossa turma ocorre grande heterogeneidade, com estudantes de 15 a mais de 60 anos, não tendo uma série predominante.

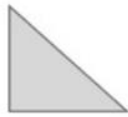
Na sequência, os alunos iniciaram as atividades sobre perímetro. Já no primeiro exercício, houve bastante dificuldade, pois ele exigia conhecimentos que ainda não haviam sido trabalhados, como o Teorema de Pitágoras em que deveria ser visto no sétimo ano do ensino fundamental na classe regular, decomposição de radicais e aproximações. Foi necessário fazer uma explicação rápida no quadro para apresentar a fórmula do Teorema de Pitágoras. Mesmo com o apoio, a turma demonstrou muita dificuldade em lidar com o conteúdo de geometria de forma geral.

Por fim, iniciamos a atividade com peças de EVA, nas quais os alunos deveriam descobrir as fórmulas de área de figuras planas por meio da manipulação das peças. Eles compreenderam bem a dedução das fórmulas do triângulo e do trapézio, mas não houve tempo hábil para concluir todas as figuras. O encerramento dessa atividade e a retomada do conteúdo ocorrerão na próxima aula.

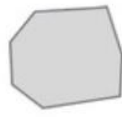
1.4.3 Materiais utilizados

Atividades 31/05/2025

Atividade 1- Determine o número de lados (L), vértices (V) e ângulos internos (a) nos seguintes polígonos:



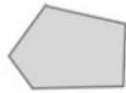
L: _____
V: _____
a: _____



L: _____
V: _____
a: _____



L: _____
V: _____
a: _____



L: _____
V: _____
a: _____



L: _____
V: _____
a: _____



L: _____
V: _____
a: _____



L: _____
V: _____
a: _____



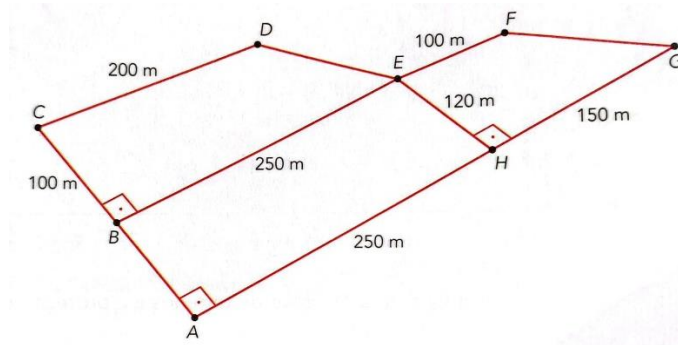
L: _____
V: _____
a: _____



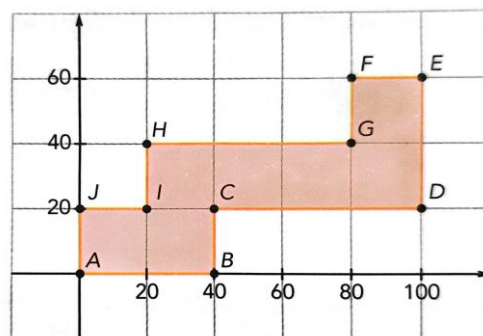
L: _____
V: _____
a: _____

Atividade 2 – Exercícios sobre Perímetro de Polígonos

1. Considere a figura a seguir. Ela representa a extensão de uma região desmatada. O terreno foi monitorado com auxílio de drones e decomposto em 2 trapézios retângulos e 1 retângulo.



- Qual é a medida aproximada do perímetro do terreno delimitado pela linha poligonal ABCDEFGHA?
 - Qual é a medida de área limitada pelo trapézio maior?
 - Qual é a medida de área da região limitada pela linha poligonal ABCDEFGHA?
2. Uma região retangular, de 20 m x 10 m, será recoberta com quadrados, todos congruentes entre si e medindo 20 cm de lado.
- O número mínimo de quadrados necessários para recobrir toda a região retangular é:
- (a) 200 (b) 400 (c) 500 (d) 4000 (e) 5000
3. Um entregador de pizza parte em sua bicicleta da pizzaria situada no ponto A e faz o seguinte percurso: A, B, C, D, E, F, G, H, I, J e volta para o ponto A. O percurso está representado na figura a seguir:

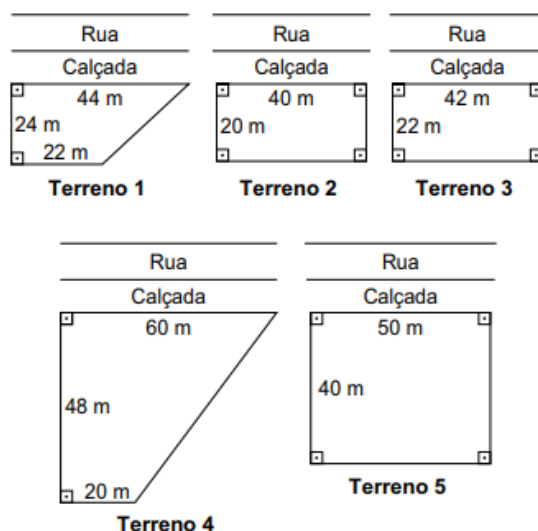


- Se a malha quadrangular é formada por quadrados menores com 20 metros de medida de lado, quantos metros o entregador de pizza percorreu nesse trajeto?
- (a) 320 (b) 480 (c) 640 (d) 700 (e) 780
4. (ENEM-2023) Uma quadra oficial de futebol de salão ocupa uma área que corresponde à área de um retângulo com comprimento de 40 m e largura de 20 m. Para segurança dos atletas, as linhas demarcatórias da quadra, nas laterais e nos fundos, deverão estar a uma

distância de, no mínimo, 2 m de obstáculos que não fazem parte da quadra, tais como rede de proteção, tela, grade ou parede.

A gerência do Departamento de Obras de uma Prefeitura avalia adquirir um terreno e nele construir uma quadra oficial de futebol de salão. Há cinco terrenos disponíveis, e a gerência comprará o terreno que tiver menor área, desde que comporte a construção da quadra garantindo todas as demandas que ofereçam segurança aos atletas. Planeja-se ainda que a quadra seja construída de modo que o seu lado maior seja paralelo à rua.

A figura ilustra os terrenos disponíveis e que estão sendo avaliados.



Qual dos cinco terrenos a gerência deve adquirir a fim de atender a todas as exigências apresentadas?

- (a) 1 (c) 3 (e) 5
 (b) 2 (d) 4

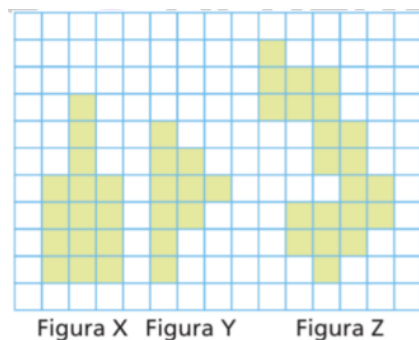
Atividade 3 - (Alan Schoenfeld) **Aguarde instruções dos professores.**

1. Na malha quadriculada abaixo, desenhe uma figura geométrica de sua preferência na coluna "Seu desenho".

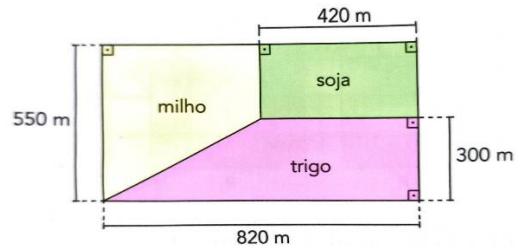
2. Depois, escreva instruções detalhadas explicando como você orientaria outra pessoa a fazer esse mesmo desenho, usando medidas, linhas e direções (esquerda, direita, cima, baixo etc.).

Atividades Extras

- Num retângulo, a medida do comprimento é 10,2 cm. Sabendo-se que a medida de sua largura é metade do comprimento, qual é o perímetro desse retângulo?
- Uma lajota hexagonal tem lados que medem 65 cm cada um. Qual é o perímetro dessa lajota, em metro?
- Seu Olavo tem 70 m de fio de arame. Verifique se essa quantidade de fio é suficiente para ele cercar totalmente:
 - um terreno quadrado que tem 17,2 m de lado.
 - um terreno retangular que tem 24,5 m de comprimento por 11,8 m de largura.
- (Saresp-SP) Sabendo que cada quadrinho mede 1 cm de lado, é correto afirmar que os perímetros das figuras X, Y e Z são, respectivamente:



- 15 cm, 10 cm, 21 cm
 - 12 cm, 10 cm, 19 cm
 - 15 cm, 9 cm, 20 cm
 - 20 cm, 18 cm, 32 cm
- Um agricultor familiar iniciou um processo de remanejamento com o objetivo de aumentar a produtividade, diminuir os custos e evitar que uma quantidade maior de área seja devastada. Nele, a área destinada ao plantio deve ser subdividida conforme o esquema a seguir.



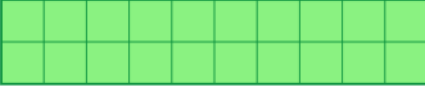

Essa área está representada por 2 trapézios retângulos e 1 retângulo, compondo uma região retangular de dimensões 820 m x 550 m.

Se o plantio de soja ocupa 10,5 hectares, a área destinada ao plantio de milho, em hectares, mede:

- (a) 10 (b) 12 (c) 14 (d) 16 (e) 18

6. Atividade sobre área

é 1 quadrado unitário.



Quais expressões podemos usar para calcular a área do retângulo?

Escolha 2 respostas:

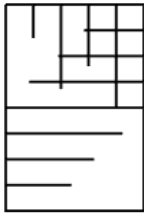
A 2×9

B $10 + 10$

C $9 + 9$

D 10×2

Qual expressão mostra uma forma de calcular a área do retângulo a seguir?



Escolha 1 resposta:

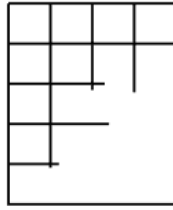
A $5 + 5 + 5 + 5 + 5$

B 8×5

C $8 + 5$

D $8 + 5 + 8 + 5$

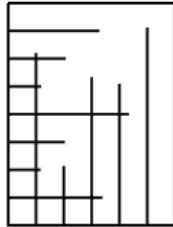
Qual expressão mostra uma forma de calcular a área do retângulo a seguir?



Escolha 1 resposta:

- A 4×4
- B $4 + 2 + 1 + 1$
- C $5 + 5 + 5 + 5 + 5$
- D 5×4

Qual equação mostra uma forma de calcular a área do retângulo a seguir?



Escolha 1 resposta:

- A $6 \text{ unidades} \times 8 \text{ unidades} = 48 \text{ unidades quadradas}$
- B $9 \text{ unidades} \times 7 \text{ unidades} = 63 \text{ unidades quadradas}$
- C $6 \text{ unidades} \times 3 \text{ unidades} = 18 \text{ unidades quadradas}$
- D $5 \text{ unidades} \times 7 \text{ unidades} = 35 \text{ unidades quadradas}$



7. Caça-Palavras

R A H S R E M G H O E R O D B Y T A Y E N U
O O N D P A C C T E T T I I R S E R E O M Y
L U A Y I C R M I M N R O W N J S F E U O O
V O R E T A S E R O F I I A E T A R T S A T
E T E O L S G O P T R Â A O A C T E S T L I
Q U A D R A D O L U G N Â T E R T C H T T Y
E O A C L O S A N G O G T R A P É Z I O U P
N N S A E B O E V A N U A P E R Í M E T R O
D O A A H E T É Á S L L U O C A N M I S A D
C G L R H T R N R I O O N O G Á X E H T I E
R Í N D E T E I E N R A O T I U I D O Â E W
W L R T I S P K A V L D T O E A C O M F T R
U O L C A A T U E P R I O O L T R E E C E T
H P E O U O O A L R S A S A A D T A N E I E
V T O M R L K E H H N D W Y L R S Y S O T C
O I S D T O O I T I W I I Y O N E E T N I R

ALTURA	DIÂMETRO	PERÍMETRO	QUADRADO	TRAPÉZIO
ARESTA	FACE	PLANO	RAIO	TRIÂNGULO
CÍRCULO	HEXÁGONO	POLÍGONO	RETA	VÉRTICE
DIAGONAL	LOSANGO	PONTO	RETÂNGULO	ÁREA

Respostas da at. 2 – 1a - $\cong 1161,8$, 1b – 22500m^2 , 1c – 67500m^2 , 2 - (e), 3 – (a) , 4 – (e)

Respostas at. extras – 2 – 3,9m 3 - a) 1,2 metros sobrando; b) 2,6 metros faltando, 4 - (d), 5 – (d)

1.5 Encontro 5 – 07/06/2025

1.5.1 Plano de Aula

Público-alvo: Alunos do Ensino Médio e ingressantes do Ensino Superior.

Professores: Letícia Gabryela Cordeiro Lang, Ana Cecília dos Santos Maciel e Felipe Cesar Muller Rio Branco.

Objetivo geral:

- Desenvolver a capacidade de identificação e análise dos elementos fundamentais de polígonos (lados, vértices e ângulos internos);
- Explicar os próprios raciocínios matemáticos;
- Relacionar o conteúdo com o cotidiano.

Objetivos específicos:

- Compreender o que são triângulos e suas classificações.
- Identificar os elementos fundamentais de um triângulo: lados, vértices, ângulos, altura e projeções.
- Resolver problemas que envolvem triângulos e suas propriedades.
- Reconhecer que a soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre 180° .
- Verificar se três medidas de comprimento podem ou não formar um triângulo.
- Observar triângulos em objetos e formas do cotidiano.
- Entender o que significa dois triângulos serem congruentes ou semelhantes.
- Utilizar propriedades geométricas e relações métricas para resolver questões envolvendo triângulos.

Conteúdos: Triângulos.

Tempo de execução:

1 encontro com duração de 4 horas aula.

Recursos didáticos:

Quadro, giz, atividades impressas, lápis, borracha, caderno, projetor, notebook, folhas sulfites coloridas tamanho A4, régua, tesoura, kit pedagógico contendo peças geométricas em EVA⁴, compasso de madeira para quadro e esquadro de plástico.

Parte 1 (Duração: 35 minutos) – Organização da sala e dos grupos

⁴ EVA: Etileno Acetato de Vinila, é um tipo de espuma leve, flexível e resistente, amplamente utilizado.



Os alunos entrarão na sala, que já estará organizada em grupos de seis pessoas. Após os professores darem as boas-vindas e iniciarem a aula, cada aluno receberá a folha de atividades.

Neste primeiro momento, os professores darão continuidade a dinâmica da aula anterior (Atividade exploratória sobre área dos polígonos), na qual os alunos irão estudar a área do losango, para que as atividades posteriores façam sentido e se relacionem com as aulas anteriores.

- **Losango**

Para o losango, os alunos utilizarão 4 peças cortadas por segmentos que representem suas diagonais. Por meio da decomposição e recomposição da figura, espera-se que percebam que a área do losango pode ser expressa como:

$$A_{\text{losango}} = \frac{D \times d}{2}$$

Parte 2 (Duração: 50 minutos) – Apresentação dos conceitos de Triângulo

Os professores apresentarão alguns elementos sobre os triângulos antes de dar início a dinâmica.

- **O que é um triângulo?**

Um triângulo é um polígono que possui exatamente três lados e três ângulos internos. Ele é a figura geométrica mais simples entre os polígonos, já que com três segmentos de reta é possível formar uma região fechada.

- **Elementos do triângulo**

Os principais elementos que compõem um triângulo são:

Lados: São os segmentos de reta que formam o contorno do triângulo. Geralmente, são indicados pelas letras que representam seus vértices, por exemplo: AB , BC e AC .

Ângulos internos: São os ângulos formados entre dois lados adjacentes dentro do triângulo.

- **Propriedades dos triângulos**

Soma dos ângulos internos: A soma dos três ângulos internos de um triângulo é sempre igual a 180° . Ou seja,

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

Soma dos ângulos externos: A soma dos ângulos externos de um triângulo (os ângulos formados entre um lado do triângulo e a extensão do lado adjacente) é sempre igual a 360° .

Relação entre lados e ângulos:

O lado cujo comprimento é menor está sempre oposto ao menor ângulo interno.

O lado cujo comprimento é maior está sempre oposto ao maior ângulo interno.

- **Classificação dos triângulos**

Os triângulos podem ser classificados de duas formas principais: de acordo com a medida do comprimento dos seus lados e de acordo com a medida dos seus ângulos.

1. Classificação quanto aos lados

Triângulo Equilátero: possui os três lados congruentes (todos iguais). Consequentemente, os três ângulos também são iguais e medem 60° cada.

Triângulo Isósceles: possui exatamente dois lados congruentes (iguais). Os ângulos opostos a esses lados também são iguais.

Triângulo Escaleno: possui todos os lados com medidas diferentes. Consequentemente, seus ângulos internos também são todos diferentes.

2. Classificação quanto aos ângulos

Triângulo Retângulo: possui um ângulo reto, ou seja, um ângulo de exatamente 90° .

Triângulo Acutângulo: possui todos os seus ângulos internos agudos (menores que 90°).

Triângulo Obtusângulo: possui um ângulo obtuso, ou seja, um ângulo maior que 90° .

- **Condição de existência do triângulo**

Nem sempre três segmentos de reta podem formar um triângulo. Para que três segmentos de reta com comprimentos a , b e c formem um triângulo, é necessário que a soma das medidas de quaisquer dois lados seja maior que o terceiro lado. Essa regra é chamada de condição de existência do triângulo e pode ser expressa assim:

$$a + b > c$$

$$a + c > b$$

$$b + c > a$$

Se alguma dessas desigualdades não for satisfeita, não é possível formar um triângulo com esses três segmentos.

- **Semelhança de Triângulos**

Na geometria, dois triângulos são considerados semelhantes quando têm a mesma forma, mesmo que tenham tamanhos diferentes. Isso significa que:

Seus ângulos correspondentes são congruentes (iguais);

Os lados correspondentes são proporcionais.



- **Critérios de Semelhança de Triângulos**

Existem três critérios principais que podemos usar para verificar se dois triângulos são semelhantes. Veja cada um deles:

1. AA (Ângulo-Ângulo)

Se dois ângulos de um triângulo forem congruentes (iguais) a dois ângulos de outro triângulo, então os triângulos são semelhantes. Como a soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre 180° , basta saber dois ângulos para que o terceiro também seja igual.

2. LAL (Lado-Ângulo-Lado)

Dois triângulos são semelhantes se dois lados correspondentes forem proporcionais e o ângulo entre eles for congruente.

3. LLL (Lado-Lado-Lado)

Se os três lados de um triângulo forem proporcionais aos três lados de outro triângulo, então os triângulos são semelhantes.

Em sequência os professores irão pedir para que os alunos respondam a “Atividade 2” representada a seguir:

Tabela 7 – Questões sobre triângulos

a) Todo triângulo possui exatamente três lados e três ângulos internos.	()
b) A soma dos ângulos internos de um triângulo pode ser maior que 180° se ele for obtusângulo.	()
c) Um triângulo equilátero tem três lados iguais e três ângulos de 60° .	()
d) Se dois triângulos têm todos os lados iguais, eles são semelhantes, mas não necessariamente congruentes.	()
e) Um triângulo pode ter dois ângulos retos.	()
f) O lado oposto ao maior ângulo é sempre o maior lado do triângulo.	()
g) Um triângulo com lados 2 cm, 3 cm e 6 cm pode ser construído.	()
h) Um triângulo escaleno tem todos os lados e todos os ângulos diferentes.	()
i) Dois triângulos são semelhantes se tiverem dois ângulos correspondentes iguais.	()
j) A soma dos ângulos externos de qualquer triângulo é sempre 360° .	()

Fonte: elaborada pelos autores do presente documento

Gabarito:

a) (V) – Por definição, um triângulo sempre tem 3 lados e 3 ângulos.

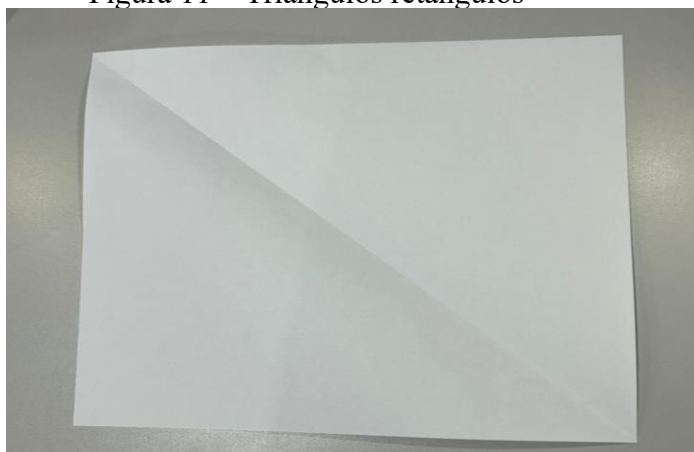
b) (F) – Mesmo em triângulos obtusângulos, a soma dos ângulos internos é sempre 180° .

- c) (V) – Triângulo equilátero tem lados e ângulos iguais, e cada ângulo mede 60° .
- d) (F) – Se todos os lados são iguais, os triângulos são congruentes e semelhantes.
- e) (F) – Dois ângulos retos ($90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$) já somam o total permitido. O terceiro ângulo seria 0° , o que não forma um triângulo.
- f) (V) – É uma propriedade fundamental: maior ângulo \rightarrow maior lado oposto.
- g) (F) – $2 + 3 = 5$, que não é maior que 6. Não satisfaz a condição de existência.
- h) (V) – Definição de triângulo escaleno.
- i) (V) – Critério AA de semelhança.
- j) (V) – A soma dos ângulos externos de qualquer triângulo é sempre 360° .

Parte 3 (Duração: 50 minutos) – Obtendo os triângulos retângulos a partir dos recortes da folha A4

Os professores solicitarão aos alunos que, utilizando uma folha A4 retangular, recortem a diagonal da mesma folha para formar 2 triângulos retângulos.

Figura 11 – Triângulos retângulos

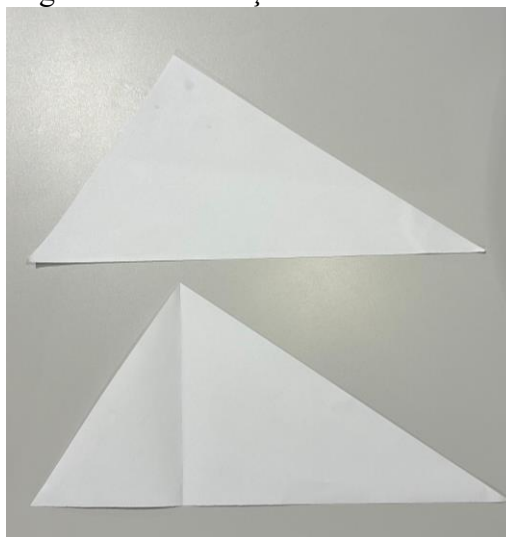


Fonte: elaborada pelos autores do presente documento

Em seguida, os professores solicitarão que os alunos realizem uma dobra demarcando a altura de um dos triângulos em relação ao lado oposto ao ângulo reto, e em sequência recortarem nesta marcação.

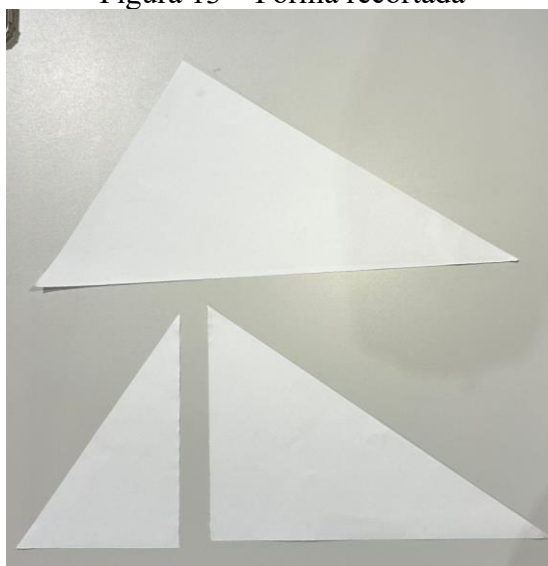


Figura 12 – Marcação da altura



Fonte: elaborada pelos autores do presente documento

Figura 13 – Forma recortada

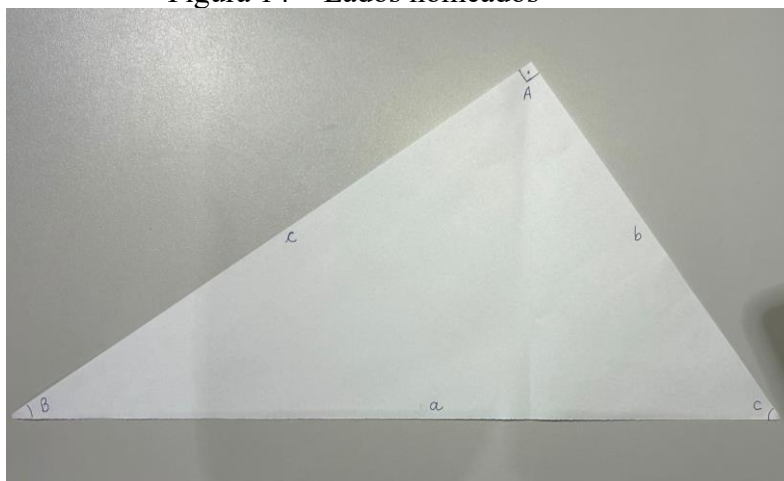


Fonte: elaborada pelos autores do presente documento

INTERVALO: 09h40min – 10h (20 minutos)

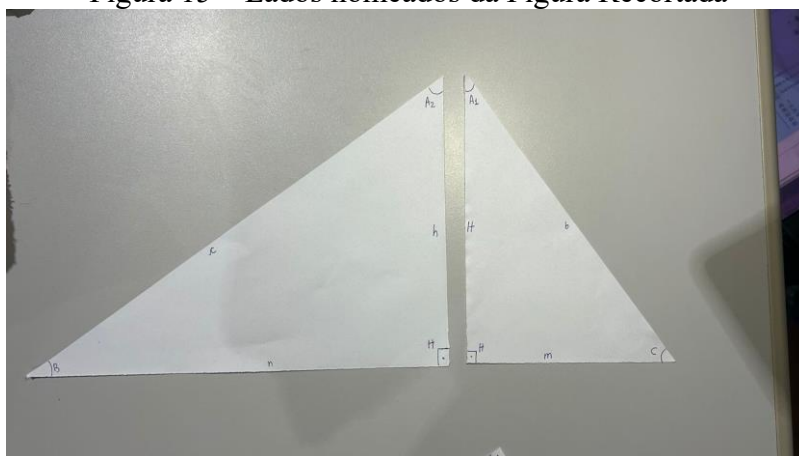
Em seguida, após o intervalo os alunos serão orientados a nomear os lados e vértices dos triângulos da forma como os professores sugerirem.

Figura 14 – Lados nomeados



Fonte: elaborada pelos autores do presente documento

Figura 15 – Lados nomeados da Figura Recortada



Fonte: elaborada pelos autores do presente documento

Parte 4 (Duração: 40 minutos) – Semelhança entre triângulos nos recortes

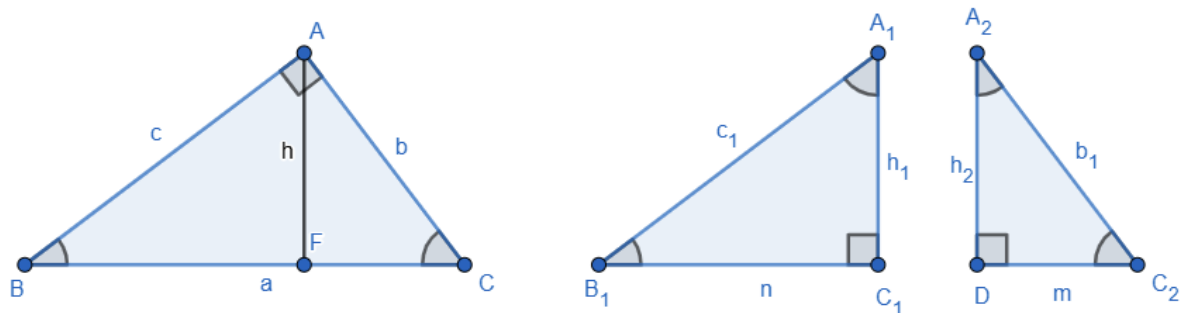
Na sequência, os professores apresentarão, por meio de *slides* projetados, os triângulos obtidos pelos alunos, porém com os vértices nomeados com letras maiúsculas e os lados indicados por letras minúsculas, facilitando a futura referência durante as discussões.

Depois que esse conteúdo for abordado, os professores irão verificar com os alunos se os triângulos obtidos nos recortes são ou não semelhantes. Durante essa análise, será observado que, de fato, os triângulos são semelhantes entre si.

Primeiramente, será observado que os triângulos ABC , ABH e ACH são semelhantes entre si, com base no critério AA (ângulo-ângulo). A partir dessa semelhança, será possível estabelecer proporções entre os lados correspondentes dos triângulos.



Figura 16 – Triângulos semelhantes



Fonte: elaborada pelos autores do presente documento

Comparando os triângulos ABC e ACH, é possível relacionar o cateto c e sua projeção n sobre a hipotenusa a:

$$\frac{a}{c} = \frac{c}{n} \rightarrow c^2 = a \cdot n$$

De forma análoga, comparando os triângulos ABC e ABH, pode-se relacionar o cateto b e sua projeção m sobre a hipotenusa:

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{m} \rightarrow b^2 = a \cdot m$$

Agora considerando os triângulos ABH e ACH, que também são semelhantes entre si. Pode-se comparar as projeções m e n com a altura h, traçada a partir do vértice do ângulo reto até a hipotenusa:

$$\frac{m}{h} = \frac{h}{n} \rightarrow h^2 = m \cdot n$$

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{m} \rightarrow b^2 = a \cdot m$$

O produto da hipotenusa pela altura relativa a ela é igual ao produto dos catetos. Essa relação pode ser deduzida a partir da semelhança entre os triângulos ABC, ABH e ACH, todos semelhantes pelo critério AA (ângulo-ângulo), já que compartilham dois ângulos congruentes com o triângulo original.

Utilizando a semelhança entre os triângulos ABH e ACH, é possível estabelecer a seguinte proporção entre os lados:

$$\frac{h}{n} = \frac{m}{h}$$

$$h^2 = m \times n$$

$$b^2 = a \times m$$

$$c^2 = a \times n$$

Multiplicando essas duas equações, obtém-se:

$$b^2 \times c^2 = (a \times m) \times (a \times n) = a^2 \times m \times n$$

Como já foi demonstrado que $h^2 = m \times n$, substitui-se:

$$b^2 \times c^2 = a^2 \times h^2$$

Tirando a raiz quadrada dos dois lados da equação, é possível chegar a uma nova relação:

$$b \times c = a \times h$$

Essa fórmula permite calcular a altura relativa à hipotenusa sem precisar conhecer diretamente os valores de m e n , bastando conhecer os comprimentos dos catetos e da hipotenusa. Assim, isolando h , temos:

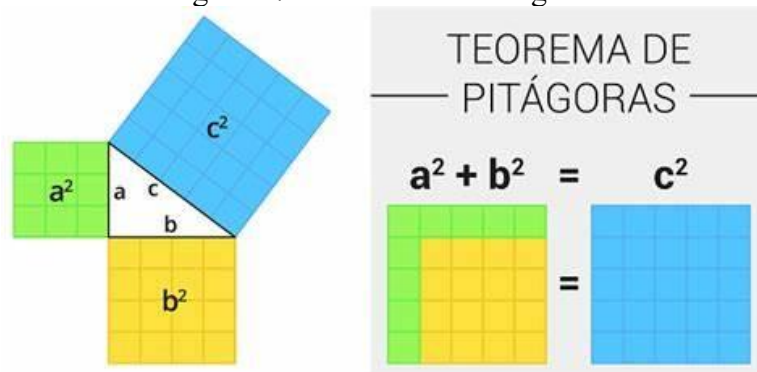
$$h = \frac{(b \times c)}{a}$$

Parte 5 (Duração: 50 minutos) – Apresentação do Teorema de Pitágoras

Teorema de Pitágoras

O Teorema de Pitágoras estabelece que, em um triângulo retângulo a área do quadrado determinado pela hipotenusa é igual a soma das áreas dos quadrados determinados pelos catetos.

Figura 17 – Teorema de Pitágoras



Fonte: istockphoto.com

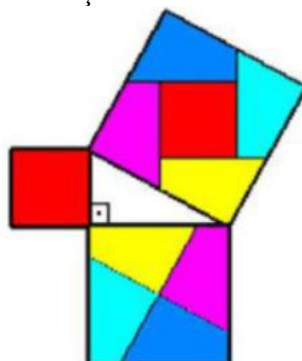
Demonstração visual

Primeiramente os professores mostrarão um vídeo, *Demonstração visual do Teorema de Pitágoras* que explora muito bem as relações métricas no triângulo retângulo.

Uma simples maneira do educando perceber que o Teorema de Pitágoras é “válido”, pode ser a partir da exploração da Figura 13.



Figura 18 – Demonstração visual do Teorema de Pitágoras



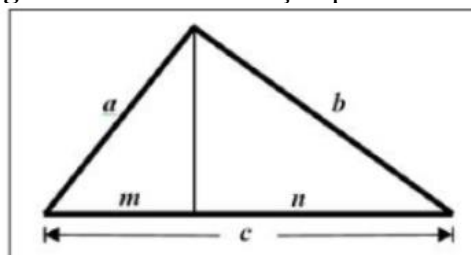
Fonte: OLIVEIRA et al., 2022.

Com essa imagem e esse vídeo, o aluno pode perceber o fato de os dois quadrados construídos a partir dos catetos (lados menores) se encaixam perfeitamente no quadrado obtido na hipotenusa (lado maior).

Demonstração por semelhança de triângulos

É também a mais conhecida. Baseia-se na seguinte consequência da semelhança de triângulos retângulos: Num triângulo retângulo, o quadrado de cada cateto é o produto entre a hipotenusa e sua projeção sobre ela. Podemos ver abaixo:

Figura 19 – Demonstração por semelhança



Fonte - educamaisbrasil.com.br

Assim se m e n são respectivamente as projeções dos catetos a e b sobre a hipotenusa c , temos $a^2 = mc$ e $b^2 = nc$. Somando, vem $a^2 + b^2 = mc + nc$. Como $m + n = c$, temos que:

$$a^2 + b^2 = mc + nc = (m + n)c = c \cdot c = c^2$$

Parte 6 (Duração: 15 minutos):

Por fim, os professores sugerirão que os exercícios sejam feitos em sala, e informamos que estamos disponíveis a esclarecer as dúvidas na sala e no nosso grupo do Whatsapp.

Avaliação

Os alunos serão avaliados a partir da participação durante as atividades e a demonstração de compreensão referente ao conteúdo pela observação dos professores. Esta observação individual, torna possível visualizar e auxiliar cada aluno em suas dificuldades específicas, de forma que a aprendizagem ocorra num âmbito qualitativo.



1.5.2 Relatório

Iniciamos os preparativos da sala organizando as carteiras em grupos de seis. O encontro contou com a presença de 32 estudantes, e ficamos contentes em perceber que os alunos estão em nossa turma desde o início do curso e ainda demonstram interesse.

Demos início à aula às 8h10min, retomando a atividade do losango (continuação da aula anterior, sobre encontrar uma generalização da área do losango a partir do retângulo), que não pôde ser concluída na aula anterior porque faltaram alguns minutos. Nessa mesma atividade, um grupo de alunos explorou a fórmula da área do trapézio a partir da decomposição em triângulos. Ao simplificar a expressão, chegaram a uma fórmula equivalente à de dois retângulos ($2.a.b$), que também pode ser visualizada como a soma de quatro triângulos. No entanto, os estudantes enfrentaram muita dificuldade para aplicar conceitos já trabalhados em aula, como proporção e razão, demonstrando fragilidade na compreensão desses fundamentos.

Para iniciarmos os conteúdos planejados para a data, apresentamos uma longa explicação sobre polígonos, utilizando os *slides* projetados, com suas características e especificações, junto de demonstrações geométricas feitas no GeoGebra. Nessa parte, os estudantes demonstraram atenção às explicações. Nesses momentos, buscamos sempre deixar clara nossa disposição em explicar da forma mais clara possível, dando bastante abertura a questionamentos e apontamentos dos alunos.

Posteriormente, ajustamos nosso planejamento: adiantamos as atividades e adiamos a dinâmica dos recortes, pois identificamos uma necessidade maior de apresentar questões que tornem os conteúdos mais "acessíveis" aos estudantes. Eles têm demonstrado muita dificuldade em interpretar as atividades, por mais bem planejadas e simples que sejam.

Além disso, quando iniciamos a apresentação das relações métricas, os estudantes mostraram-se confusos ao tentar identificar o que estávamos explicando, já que a transposição didática desse conteúdo é matematicamente complexa e um pouco confusa. Ainda assim, a abordagem por semelhança de triângulos facilitou mais o entendimento do que a simples memorização de fórmulas prontas.

Por fim, no último momento, apresentamos a representação do Teorema de Pitágoras junto a um vídeo mostrando as construções que permitem sua visualização. A surpresa dos estudantes foi evidente, revelando como a construção gradual do conhecimento pode ser impactante. O importante foi perceber que, apesar das dificuldades, a conexão entre os conceitos começou a fazer sentido quando explorada de forma visual e contextualizada.

1.5.3 Materiais utilizados

Atividades 07/06/2025

Atividade 1 – Triângulos

- a) O que é um triângulo?
- b) Elementos do triângulo:
- c) Propriedades dos triângulos:
- d) Classificação dos triângulos:
- i. Quanto aos lados:
- ii. Quanto aos ângulos:
- e) Condição de existência do triângulo:

Atividade 3 - Semelhança entre triângulos

1. Quais são os casos de semelhança de triângulos?
- 1° _____:
- 2° _____:
- 3° _____:

Atividade 2 – Analise as definições e indique V quando verdadeira e F quando falsa.

k) Todo triângulo possui exatamente três lados e três ângulos internos.	()
l) A soma dos ângulos internos de um triângulo pode ser maior que 180° se ele for obtusângulo.	()
m) Um triângulo equilátero tem três lados iguais e três ângulos de 60° .	()
n) Se dois triângulos têm todos os lados iguais, eles são semelhantes, mas não necessariamente congruentes.	()
o) Um triângulo pode ter dois ângulos retos.	()
p) O lado oposto ao maior ângulo é sempre o maior lado do triângulo.	()
q) Um triângulo com lados 2 cm, 3 cm e 6 cm pode ser construído.	()



r) Um triângulo escaleno tem todos os lados e todos os ângulos diferentes.	()
s) Dois triângulos são semelhantes se tiverem dois ângulos correspondentes iguais.	()
t) A soma dos ângulos externos de qualquer triângulo é sempre 360° .	()

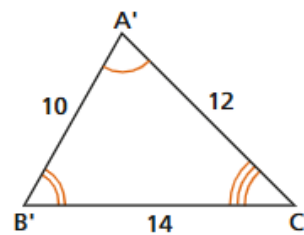
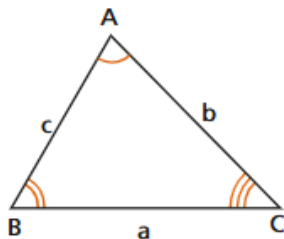
Atividades Extras

1. Fernando é um carpinteiro e está separando ripas de madeira de diversos comprimentos para construir estruturas triangulares.

Dentre as seguintes opções de trios de ripas, a única capaz de formar um triângulo é:

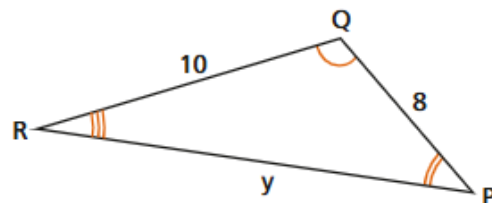
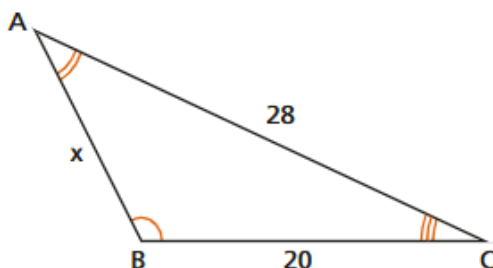
- (a) 3 cm, 7 cm, 11 cm
- (b) 6 cm, 4 cm, 12 cm
- (c) 3 cm, 4 cm, 5 cm
- (d) 7 cm, 9 cm, 18 cm

2. Os triângulos ABC e $A'B'C'$ da figura são semelhantes ($\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$).

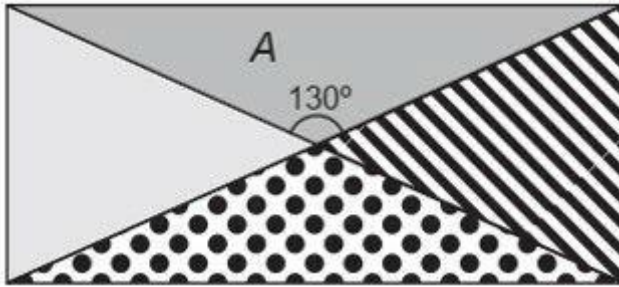


Se a razão de semelhança do 1º para o 2º é $\frac{3}{2}$, determine:

- a) a, b e c
 - b) a razão entre os seus perímetros
3. Os triângulos ABC e PQR são semelhantes. Determine x e y .



4. (ENCCEJA 2012) Uma colcha de retalhos, com formato retangular, é feita com quatro recortes triangulares de tecidos, conforme a figura.

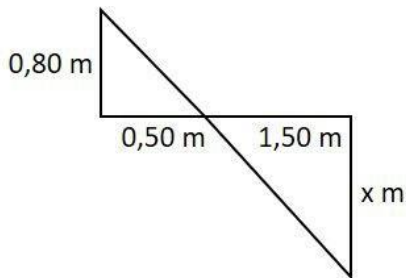


Considere que as costuras nos sentidos das diagonais dessa colcha são perfeitamente retilíneas.

O retalho A da colcha, que tem o formato de um triângulo, pode ser classificado quanto a seus ângulos internos e lados, respectivamente, como

- (a) acutângulo e equilátero.
- (b) obtusângulo e escaleno.
- (c) obtusângulo e isósceles.
- (d) retângulo e isósceles.

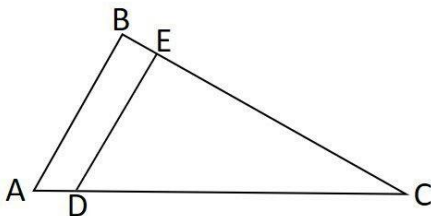
5. Determine o comprimento do segmento x .



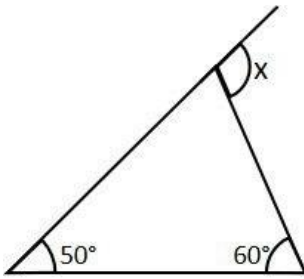
6. Analise a figura a seguir formada por triângulos, onde DE é paralelo a AB e, sabendo que:

$$CD = 15, AD = 1, AB = 8$$

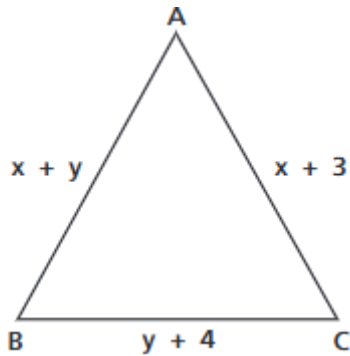
Qual o comprimento do lado DE ?



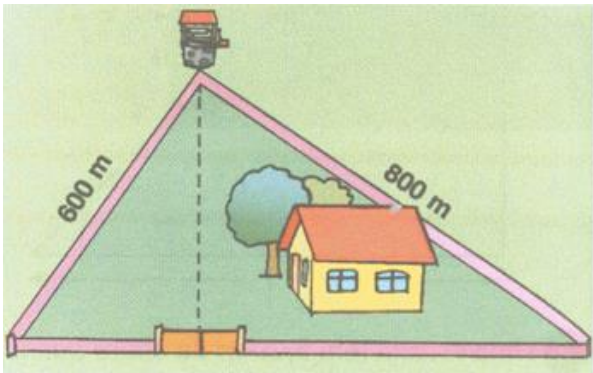
7. Na imagem abaixo, determine a opção em graus do valor do ângulo x .



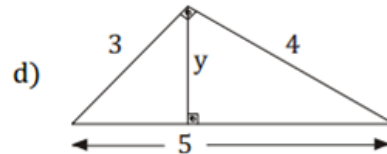
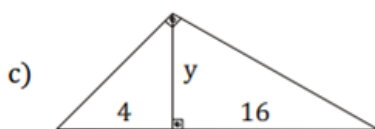
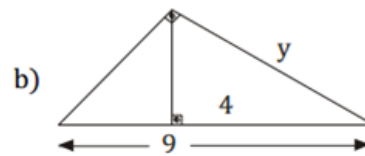
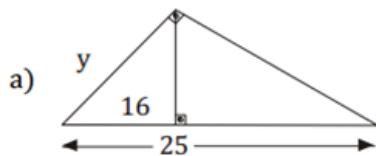
8. Determine x e y sabendo que o triângulo ABC é equilátero.



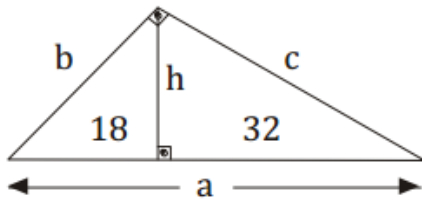
9. A chácara de Ângela tem a forma de um triângulo retângulo e as dimensões indicadas na figura. Qual a distância entre o portão e o poço?



10. Encontre o valor de y em cada figura:



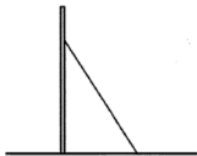
11. A soma dos números correspondentes às medidas a , b , c e h no triângulo da figura abaixo formam uma senha que abre a câmara secreta.



Qual a senha que abre câmara?

- (a) 124
- (b) 134
- (c) 174
- (d) 144
- (e) n.d.a

12. Observe esta figura que representa uma escada apoiada em uma parede. O topo da escada está a 7 m de altura, e seu pé está afastado da parede 2 m. A escada mede, aproximadamente:



- (a) 5 m
- (b) 6,7 m
- (c) 7,3 m
- (d) 9 m

13. Millôr Fernandes, em uma bela homenagem à Matemática, escreveu um poema do qual extraímos o fragmento a seguir:

Às folhas tantas de um livro de Matemática,
um Quociente apaixonou-se um dia doidamente
por uma Incógnita.

Olhou-a com seu olhar inumerável
e viu-a do ápice à base: uma figura ímpar;
olhos romboides, boca trapezoide,
corpo retangular, seios esferoides.



Fez de sua uma vida paralela à dela,
até que se encontraram no infinito.
"Quem és tu?", indagou ele em ânsia radical.
"Sou a soma do quadrado dos catetos.
Mas pode me chamar de Hipotenusa.
"(Millôr Fernandes. Trinta Anos de Mim Mesmo.)”

A Incógnita se enganou ao dizer quem era. Para atender ao Teorema de Pitágoras, deveria dar a seguinte resposta:

- (a) “Sou a soma dos catetos. Mas pode me chamar de hipotenusa.”
- (b) “Sou o quadrado da soma dos catetos. Mas pode me chamar de hipotenusa.”
- (c) “Sou o quadrado da soma dos catetos. Mas pode me chamar de quadrado da hipotenusa.”
- (d) “Sou a soma dos quadrados dos catetos. Mas pode me chamar de quadrado da hipotenusa.”

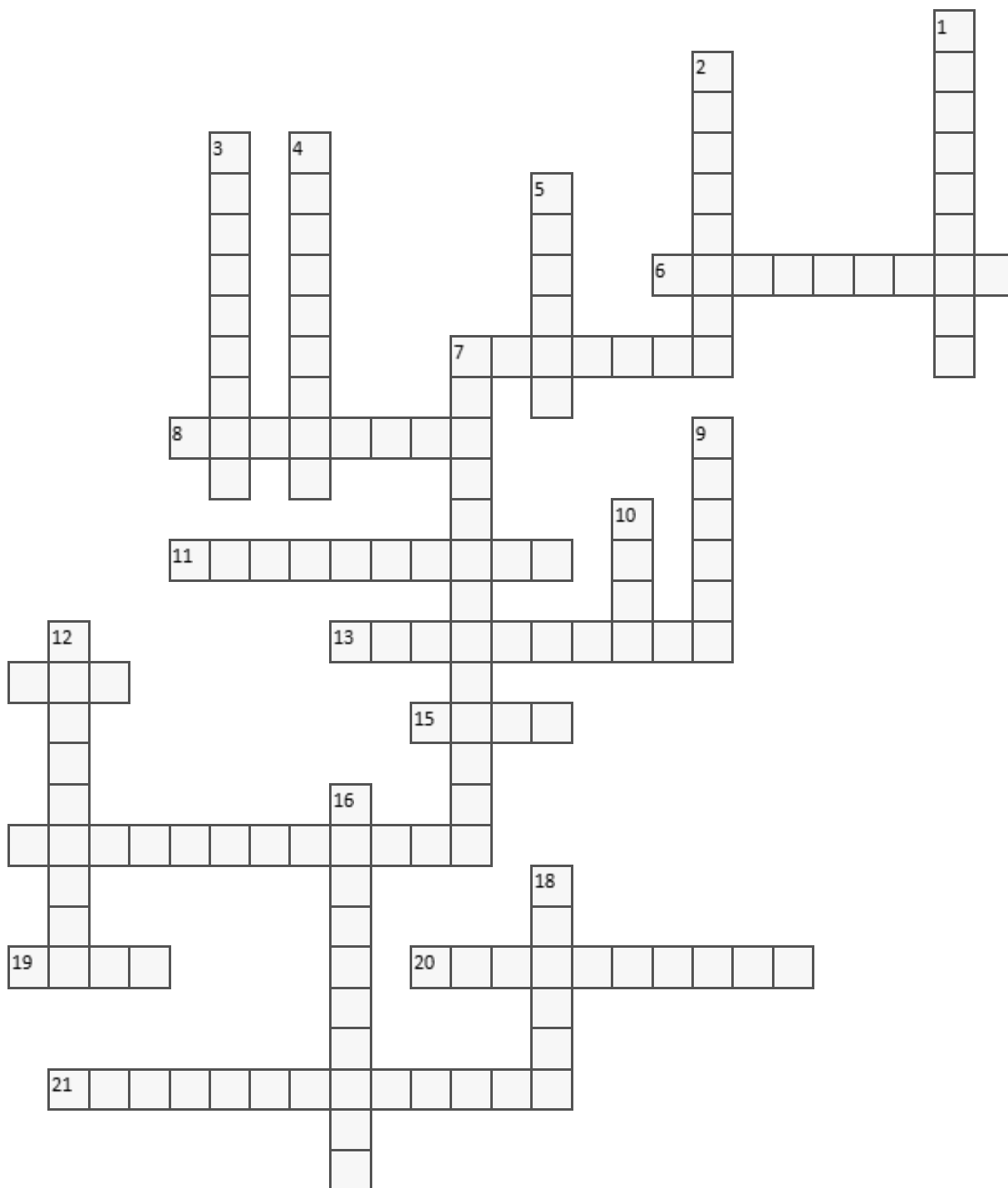
14. Cruzadinha

Horizontalmente

- 6. Soma dos lados de um triângulo
- 7. Forma geométrica com todos os pontos equidistantes do centro
- 8. Propriedade de equilíbrio em figuras
- 11. Relacionada ao teorema de Pitágoras
- 13. Triângulo com todos os lados iguais
- 14. Espaço dentro de um triângulo
- 15. Um dos segmentos que formam o triângulo
- 17. Ângulo formado fora do triângulo
- 19. Resultado da adição dos ângulos internos
- 20. Triângulo com todos os ângulos agudos
- 21. Ângulo formado dentro do triângulo

Verticalmente

- 1. Ramo da matemática que estuda formas e espaços
- 2. Triângulo com todos os lados diferentes
- 3. Divisão de um ângulo em duas partes iguais
- 4. Triângulo com dois lados iguais
- 5. Segmento perpendicular da base ao vértice
- 7. Divisão dos triângulos com base em seus lados ou ângulos
- 9. Formado pela interseção de dois segmentos de reta
- 10. Lado inferior de um triângulo
- 12. Triângulo com um ângulo reto
- 16. Figuras com a mesma forma, mas tamanhos diferentes
- 18. Triângulo com um ângulo maior que 90 graus



Respostas: 1: c - 2: 21 ;18 ;15 - 3: 16 ;14 - 4: c - 5: 2,4 - 6: 7,5 - 7: 110 - 8: 4 ;3 - 9: 480m
 - 10: 20 ;6 ;8 ; $\frac{12}{5}$ 11: 144 - 12: 7,3 - 13: d



SLIDES

Figura 20 – Slides de 07/06/2025

Triângulos e ângulos
Ana Cecília, Leticia e Felipe

CLASSIFICAÇÃO
Quanto aos lados.

Escaleno, Isósceles, Equilátero

CLASSIFICAÇÃO
Quanto aos ângulos.

Retângulo, Obtusângulo, Acutângulo

DEFINIÇÃO
Um triângulo é um polígono que possui exatamente **três lados e três ângulos internos**.
Ele é a figura geométrica mais simples entre os polígonos.

LADOS
Segmentos de reta que formam o contorno do triângulo.

ÂNGULOS INTERNOS
São os ângulos formados entre dois lados adjacentes dentro do triângulo.

ÂNGULOS EXTERNOS
São os suplementares dos respectivos ângulos internos.

Elementos

CONDICÃO DE EXISTÊNCIA
A soma de dois lados deve ser maior que o terceiro lado.

$a + b > c$
 $b + c > a$
 $a + c > b$

Propriedades

- Soma dos ângulos internos = 180°
- Soma dos ângulos externos = 360°
- O maior lado é oposto ao maior ângulo interno.
- O menor lado é oposto ao menor ângulo interno.

Crêterios de Semelhança de triângulos
https://www.ufpa.br/semestres/disciplinas/geometria/11202/criando2_criterios.html

Fonte: elaborada pelos autores do presente documento

1.6 Encontro 6 – 14/06/2025

1.6.1 Plano de Aula

Público-alvo: Alunos do Ensino Médio e ingressantes no Ensino Superior.

Professores: Letícia Gabryela Cordeiro Lang, Ana Cecília dos Santos Maciel e Felipe Cesar Muller Rio Branco.

Objetivo geral:

- Desenvolver a capacidade de identificação e análise dos elementos fundamentais de circunferências (raio, diâmetro e corda);
- Relacionar situações a seus conceitos matemáticos à suas aplicabilidades.
- Explicar os próprios raciocínios matemáticos.

Objetivos específicos:

- Identificar formas circulares e esféricas.
- Compreender as propriedades de uma circunferência.
- Relacionar formas esféricas e círculos à objetos e espaços do cotidiano, bem como identificar a presença do número π nestes objetos.
- Resolver problemas envolvendo circunferências e círculos.

Conteúdos: Circunferência, Círculo e Esfera.

Tempo de execução:

1 encontro com duração de 4 horas aula.

Recursos didáticos:

Quadro, giz, atividades impressas, réguas, lápis, borracha, projetor, notebook, objetos circulares, fitas métricas, trenas, caixa de som, materiais para atividade da área da circunferência, GeoGebra.

Parte 1 (Duração: 10 minutos) – Organização da sala e dos grupos

Os alunos entrarão na sala, que já estará organizada em grupos de seis pessoas. Após os professores darem as boas-vindas e iniciarem a aula, cada aluno receberá a folha de atividades.

Parte 2 (Duração: 20 minutos) – Formalização dos elementos da Circunferência

Inicialmente, os professores conduzirão uma aula expositiva, com menor participação dos alunos, visando apresentar de forma objetiva os conceitos da geometria que servirão de base para o estudo da circunferência. A explicação será acompanhada por *slides*.



Elementos a serem apresentados:

- **Raio:** segmento de reta que liga o centro da circunferência a qualquer ponto sobre ela.
- **Corda:** segmento cujas extremidades pertencem à circunferência.
- **Diâmetro:** segmento de reta que passa pelo centro da circunferência e une dois pontos da circunferência; é o dobro do raio e a maior corda da circunferência.
- **Circunferência:** conjunto de todos os pontos no plano que estão à mesma distância (raio) do centro.

Parte 3 (Duração: 20 minutos) – Dinâmica para fixação dos elementos da circunferência

Após a apresentação dos elementos necessários para trabalhar com circunferência, os professores conduzirão uma dinâmica na qual a turma formará uma circunferência posicionando um estudante do lado do outro (ombro a ombro) e uma pessoa ficará no centro desta circunferência, será solicitado que um estudante meça a distância entre a pessoa do centro e alguma pessoa presente na formação da circunferência (medição do raio), esta medida deverá ser anotada no quadro para ser trabalhado posteriormente. Continuando, será solicitado para que seja medido a distância entre duas pessoas paralelas e oposta (uma em relação a outra) na circunferência (medição do diâmetro), deverá ser anotado no quadro novamente.

Para segunda etapa será solicitado para que as pessoas se afastem um pouco uma das outras para que aumente o tamanho da circunferência, os mesmos dados deverão ser coletados. Está dinâmica apenas para relacionar o diâmetro, raio, circunferência e círculo. Posteriormente será solicitado utilizar os dados da dinâmica da parte 3 para utilizar na dinâmica da parte 4.

Dependendo do tempo de execução e se houverem dúvidas, o procedimento deverá ser repetido com um espaçamento maior entre os estudantes, se houver necessidade a turma poderá dividir-se em até 3 grupos para esta dinâmica, com um professor responsável por grupo.

Parte 4 (Duração: 30 minutos) – Dinâmica: Descobrimo o Pi

Neste momento, cada grupo utilizará as fitas métricas e os objetos circulares para medir a circunferência e o diâmetro de cada item. Após as medições, os alunos deverão calcular a razão entre a circunferência e o diâmetro, registrando os resultados na tabela a seguir:

Tabela 8 – Tabela de Medição e Cálculo da Razão entre Circunferência e Diâmetro

Objeto	Diâmetro (cm)	Circunferência (cm)	$\frac{\text{Circunferência}}{\text{Diâmetro}}$

Fonte: elaborada pelos autores do presente documento

Agora, é possível fazer uma manipulação algébrica para perceber a fórmula do comprimento da circunferência. É possível ver que

$$\frac{\text{Circunferência}}{\text{Diâmetro}} = \pi$$

E:

$$\text{Diâmetro} = 2 \times \text{Raio}$$

Então

$$\frac{\text{Circunferência}}{2 \times \text{Raio}} = \pi$$

Assim,

$$\text{Circunferência} = 2 \times \pi \times \text{Raio} = 2\pi r$$

INTERVALO: 09h40min – 10h (20 minutos)

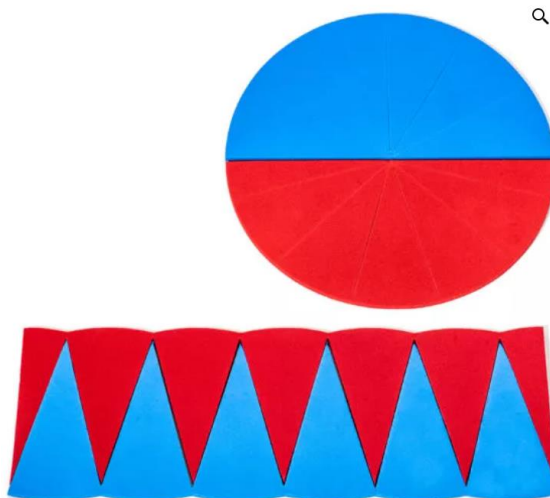
Parte 4 (Duração: 25 minutos) – Atividade exploratória sobre a área da circunferência

Nesta etapa, os alunos utilizarão um material manipulável composto por uma circunferência confeccionada em EVA nas cores azul e vermelha. Esse material está dividido em dois semicírculos, cada um formado por vários triângulos que podem ser reorganizados de forma a se aproximarem de um retângulo.

A partir disso, os alunos deverão aplicar os conhecimentos sobre a área do retângulo — já abordados em aulas anteriores — para deduzir a fórmula da área da circunferência, observando a relação entre a base (metade da circunferência) e a altura (raio).



Figura 21 – Material sobre a área da circunferência



Fonte: MMP Materiais Pedagógicos para Matemática

Na sequência, apresentaremos uma demonstração no GeoGebra que ilustra a relação entre a **área da circunferência** e a área de um retângulo. Embora o vídeo esteja em inglês, faremos observações para garantir a compreensão dos alunos, utilizando-o como apoio visual para compreenderem o conceito da área da circunferência. Em seguida, proporemos alguns exercícios práticos envolvendo o cálculo do comprimento e da área da circunferência.

Parte 5 (Duração: 25 minutos) – Círculo e introdução à esfera

Para trabalhar com a esfera, os professores não sairão dos conceitos apresentados anteriormente: pois trabalharão com os conhecimentos prévios das aulas anteriores. Partindo da área do círculo para a área da esfera.

Círculo: região do plano delimitada pela circunferência, incluindo todos os pontos internos a ela.

- **Elementos do círculo**

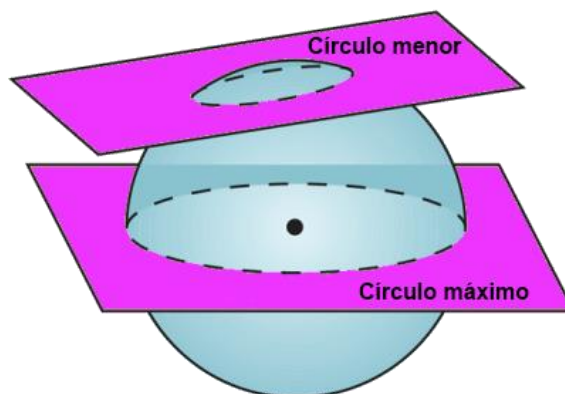
1. **Semicírculo:** Metade do círculo delimitada por um diâmetro.
2. **Setor circular:** "Fatia" do círculo entre dois raios e um arco.
3. **Coroa circular:** É a região do plano delimitada por duas circunferências de mesmo centro, uma delas inscrita na outra.

A esfera será inerida apenas como mostra da união de n círculos.

Esfera: a esfera é um sólido geométrico classificado como um corpo redondo.

1. **Círculo Máximo:** Intersecção da superfície esférica com um plano que passa pelo centro da esfera, em outras palavras, é o círculo que divide a esfera em duas partes iguais.
2. **Círculo Menor:** Círculo traçado sobre uma superfície esférica cujo centro não coincide com o centro da esfera. Pode ser também chamado de pequeno círculo.

Figura 22 – Círculo Máximo e Círculo Menor



Fonte: ceibal.edu.uy

Parte 6 (Duração: 45 minutos) – Execução dos exercícios

Nesta aula, os professores darão prioridade aos exercícios presente na lista, para que os elementos apresentados sejam fixados e trabalhados de forma significativa.

Todos os exercícios estão presentes na lista entregue na data.

Parte 7 (Duração: 5 minutos) – Despedida

Em sequência, os professores agradecerão a presença de todos e entregarão um doce como forma de agradecimento e incentivo, pedem ajuda para organizar a sala novamente e reforçam que o grupo do Whatsapp foi criado para compartilharem as resoluções e os estudantes tirarem suas dúvidas.

Avaliação

Os alunos serão avaliados a partir da participação durante as atividades e a demonstração de compreensão referente ao conteúdo pela observação dos professores. Esta observação individual, torna possível visualizar e auxiliar cada aluno em suas dificuldades específicas, de forma que a aprendizagem ocorra num âmbito qualitativo.



1.6.2 Relatório

Iniciamos os preparativos da aula com a organização da sala, dispondo as carteiras em grupos de seis alunos. O encontro contou com a presença de X estudantes, sendo Y meninos e Z meninas.

A aula teve início com a abordagem dos conceitos relacionados a círculo e circunferência. Enquanto os professores apresentavam os *slides* explicativos, os alunos copiavam os conceitos em suas respectivas folhas de atividade. Em seguida, contrariando o plano de aula previamente elaborado, realizou-se a dinâmica de exploração do número π , utilizando objetos circulares do cotidiano. Os alunos mediram a circunferência e o diâmetro dos objetos e calcularam a razão entre essas medidas, observando que o valor obtido se aproximava do número π .

Na sequência, foi realizada outra atividade prática: os alunos formaram uma grande circunferência, tendo uma das professoras representando o centro. A partir dessa formação, mediu-se o raio e o comprimento da circunferência, permitindo aos alunos relacionarem os dados e, depois das duas dinâmicas, compreenderem como se chega à fórmula do comprimento da circunferência ($C = 2\pi r$).

Posteriormente, os alunos foram convidados a resolver exercícios da lista de atividades, sendo acompanhados pelos professores, que ofereceram apoio para esclarecimento de dúvidas. Foi possível observar que, diante de desafios maiores, alguns alunos tendem a desistir com facilidade, enquanto outros nem sequer iniciam a resolução, ao perceberem a complexidade do exercício.

Na volta do intervalo, retomaram-se os *slides* com os conceitos sobre círculo, informando a distinção entre círculo e circunferência. Foram feitas explicações teóricas sobre elementos do círculo, como semicírculo, setor circular e coroa circular.

Após a apresentação dos conceitos, foi entregue aos alunos o material de EVA (Etileno Acetato de Vinila, é um tipo de espuma leve, flexível e resistente, amplamente utilizado), confeccionado com o objetivo de aproximar visualmente a área do círculo à de um retângulo. Por meio da reorganização dos setores circulares, os estudantes foram levados a deduzir a fórmula da área da circunferência ($A = \pi r^2$). A atividade foi considerada bastante proveitosa, pois proporcionou uma compreensão visual e concreta da fórmula.

Na parte final da aula, reservou-se um tempo significativo para a resolução de exercícios, reforçando os conteúdos abordados. Para concluir, foram apresentados alguns conceitos introdutórios sobre esfera, com o objetivo de oferecer aos alunos uma noção preliminar sobre o tema, embora não tenham sido realizadas atividades práticas a respeito.

Ao término da aula, foram distribuídos pirulitos aos alunos e feito um breve anúncio do tema da próxima aula, como forma de despertar o interesse e a curiosidade da turma.



1.6.3 Materiais utilizados

Atividades 14/06/2025

Atividade 1- Questões sobre os conceitos apresentados.

- a) O que é o raio de uma circunferência? Desenhe.
- b) O que é o diâmetro de uma circunferência? Desenhe.
- c) Como o diâmetro se relaciona com o raio?
- d) A circunferência representa uma linha ou uma área?
- e) Todos os pontos da circunferência estão à mesma distância de qual ponto?
- f) O que diferencia o círculo da circunferência?
- g) O que é um semicírculo?
- h) O que é um setor circular?
- i) O que é uma coroa circular?
- j) O que é uma esfera?
- k) O que é um círculo máximo?
- l) O que é um círculo menor?

Atividade 2 – Tabela de Medição e Cálculo da Razão entre Circunferência e Diâmetro

Objeto	Diâmetro (cm)	Circunferência (cm)	$\frac{\text{Circunferência}}{\text{Diâmetro}}$

Essas razões se aproximam de qual número?

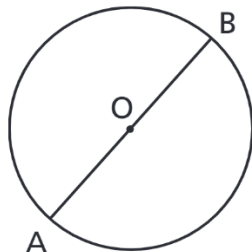
Atividade 3 – De que forma podemos determinar o comprimento da circunferência em função do raio, utilizando a equação abaixo?

$$\frac{\text{Circunferência}}{\text{Diâmetro}} =$$

E qual fórmula usamos para calcular a área da circunferência?

Atividades Extras

1. Determine o raio do círculo de centro O, dados: $AB = 3x - 3$ e $AO = x + 3$.



2. Sobre uma circunferência qualquer, julgue as afirmativas a seguir:



- i. A circunferência de centro O e raio r é um conjunto de todos os pontos cuja distância até O é igual a r .
- ii. O comprimento do diâmetro é sempre igual à metade do comprimento do raio.
- iii. A circunferência é uma área plana limitada por um círculo.

Marque a alternativa correta:

- (a) Somente a afirmativa I é verdadeira.
- (b) Somente a afirmativa II é verdadeira.
- (c) Somente a afirmativa III é verdadeira.
- (d) Todas as afirmativas são falsas.

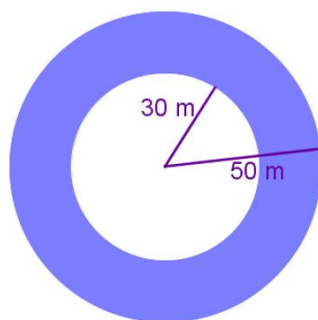
3. Determine o valor do diâmetro de um canteiro que apresenta perímetro de 20 m.

4. (IFG 2019) Se o raio R de uma circunferência for reduzido pela metade, é correto afirmar que:

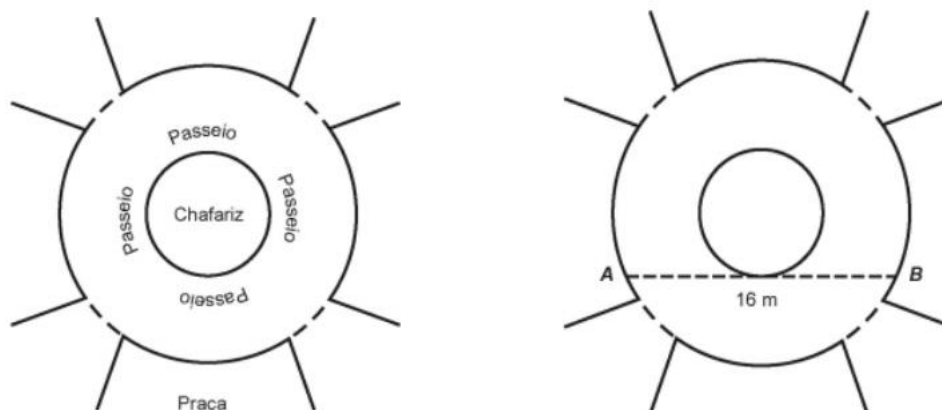
- (a) O valor da área círculo ficará reduzida pela metade do valor da área do círculo inicial de raio R .
- (b) O valor da área do círculo ficará a $\frac{3}{4}$ do valor da área do círculo inicial de raio R .
- (c) O comprimento da circunferência se reduzirá a $\frac{1}{4}$ do valor do comprimento da circunferência inicial de raio R .
- (d) O comprimento da circunferência se reduzirá à metade do valor do comprimento da circunferência inicial de raio R .

5. Qual é a metade da área do círculo cujo diâmetro mede 45 metros? ($\pi = 3,14$).

6. Planeja-se construir uma piscina circular com uma ilha no meio, também circular. Sabendo que o raio da ilha possui 30 metros e que o raio da piscina possui 50 metros, qual é a área da superfície da piscina? ($\pi = 3,14$).



7. A área onde será construído um shopping é circular e tem medida igual a 70650 m^2 . Qual é o raio do círculo descrito por essa área? ($\pi = 3,14$).
8. Um marceneiro recebeu a encomenda de uma mesa circular de 3 m^2 de área. Qual deverá ser o raio da tábua dessa mesa para atender ao pedido do cliente? (Use $\pi = 3$)
9. **(Enem 2018 - Adaptado)** A figura mostra uma praça circular que contém um chafariz em seu centro e, em seu entorno, um passeio. Os círculos que definem a praça e o chafariz são concêntricos.

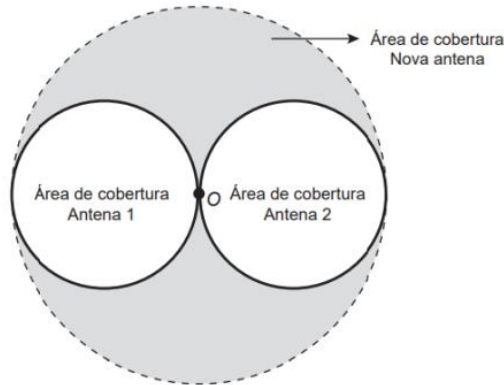


O passeio terá seu piso revestido com ladrilhos. Sem condições de calcular os raios, pois o chafariz está cheio, um engenheiro fez a seguinte medição: esticou uma trena tangente ao chafariz, medindo a distância entre dois pontos A e B, conforme a figura. Com isso, obteve a medida do segmento de reta AB: 16 m.

Dispondo apenas dessa medida, o engenheiro calculou corretamente a medida da área do passeio, em metro quadrado. A medida encontrada pelo engenheiro foi?



10. (Enem 2015 - Adaptado) Uma empresa de telefonia celular possui duas antenas que serão substituídas por uma nova, mais potente. As áreas de cobertura das antenas que serão substituídas são círculos de raio 2 km, cujas circunferências se tangenciam no ponto O, como mostra a figura.



O ponto O indica a posição da nova antena, e sua região de cobertura será um círculo cuja circunferência tangenciará externamente as circunferências das áreas de cobertura menores. Com a instalação da nova antena, a medida da área de cobertura, em quilômetros quadrados, foi ampliada em?

11. (Enem 2012 - Adaptado) O losango representado na Figura 1 foi formado pela união dos centros das quatro circunferências tangentes, de raios de mesma medida.

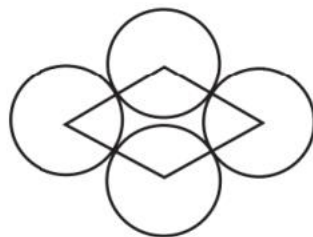


Figura 1

Dobrando-se o raio de duas das circunferências centradas em vértices opostos do losango e ainda mantendo-se a configuração das tangências, obtém-se uma situação conforme ilustrada pela Figura 2.

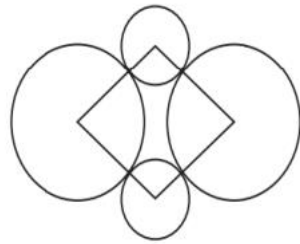
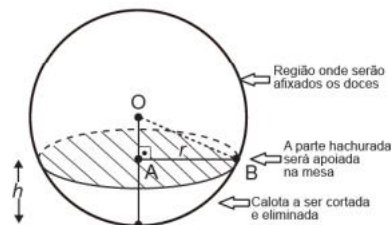


Figura 2

O perímetro do losango da Figura 2, quando comparado ao perímetro do losango da Figura 1, teve um aumento de?

12. (Enem 2017) Para decorar uma mesa de festa infantil, um chefe de cozinha usará um melão esférico com diâmetro medindo 10 cm, o qual servirá de suporte para espetar diversos doces. Ele irá retirar uma calota esférica do melão, conforme ilustra a figura, e, para garantir a estabilidade deste suporte, dificultando que o melão role sobre a mesa, o chefe fará o corte de modo que o raio r da seção circular de corte seja de pelo menos 3 cm. Por outro lado, o chefe desejará dispor da maior área possível da região em que serão afixados os doces.



Para atingir todos os seus objetivos, o chefe deverá cortar a calota do melão numa altura h , em centímetro, igual a?



13. (Enem 2012) O globo da morte é uma atração muito usada em circos. Ele consiste em uma espécie de jaula em forma de uma superfície esférica feita de aço, onde motoqueiros andam com suas motos por dentro. A seguir, tem-se, na Figura 1, uma foto de um globo da morte e, na Figura 2, uma esfera que ilustra um globo da morte:

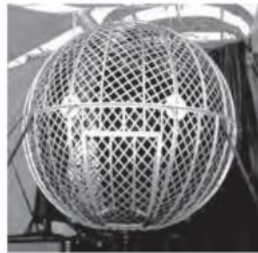


Figura 1

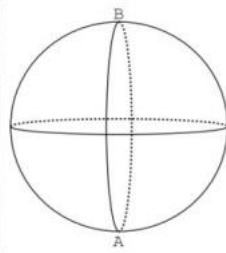
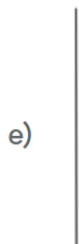
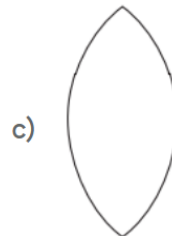
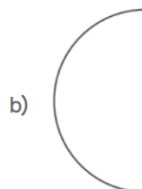
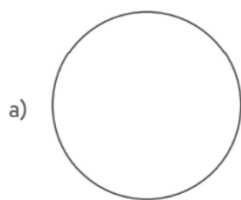
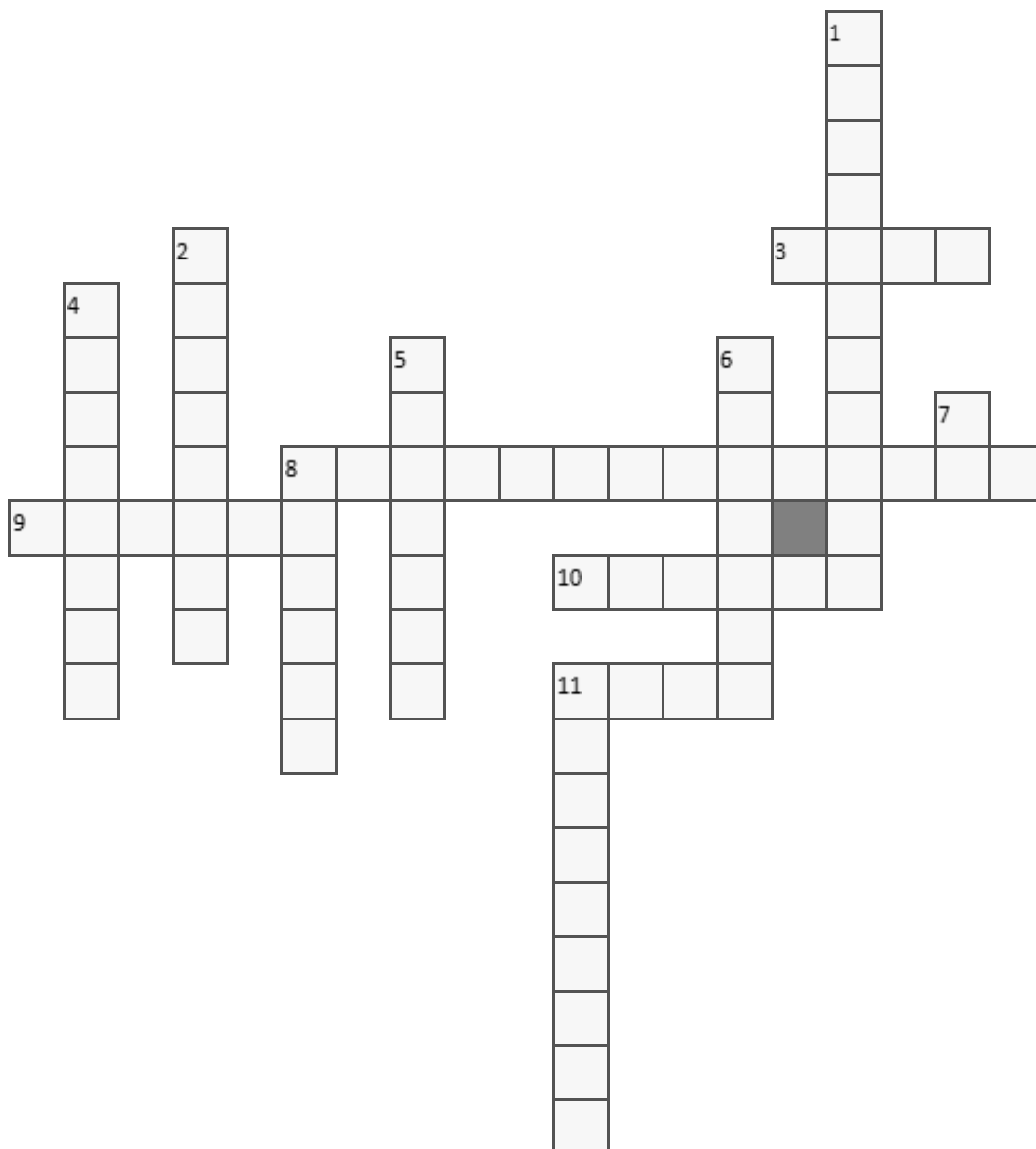


Figura 2

Na Figura 2, o ponto A está no plano do chão onde está colocado o globo da morte e o segmento AB passa pelo centro da esfera e é perpendicular ao plano do chão. Suponha que há um foco de luz direcionado para o chão colocado no ponto B e que um motoqueiro faça um trajeto dentro da esfera, percorrendo uma circunferência que passa pelos pontos A e B. A imagem do trajeto feito pelo motoqueiro no plano do chão é mais bem representada por:



Cruzadinha



Horizontalmente

3. Espaço contido dentro do círculo
8. Perímetro do círculo
9. Ponto equidistante de todos os pontos da circunferência

Verticalmente

1. Medida da extensão total da linha que forma a circunferência
2. Segmento que passa pelo centro e liga dois pontos da circunferência


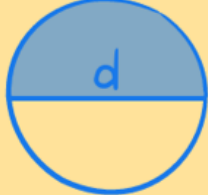




Horizontalmente

Verticalmente

- | | |
|--|---|
| <p>10. Formado por dois raios que partem do centro</p> <p>11. Distância do centro até a borda do círculo</p> | <p>4. Reta que toca a circunferência em um único ponto</p> <p>5. Conjunto de símbolos usados para calcular medidas, como o comprimento ou a área</p> <p>6. Forma geométrica com todos os pontos equidistantes do centro</p> <p>7. Constante matemática que relaciona o diâmetro e a circunferência</p> <p>8. Segmentos que ligam dois pontos da circunferência sem passar necessariamente pelo centro</p> <p>11. Polígono de quatro lados, com lados opostos iguais e ângulos retos</p> |
|--|---|

SLIDES**Figura 23** – Slides de 14/06/2025

 <p>O símbolo usado para representar o pi é π</p> $\pi = \frac{\text{circunferência}}{\text{diâmetro}}$ <p>A razão entre a circunferência e o diâmetro de um círculo é sempre π, independentemente do tamanho do círculo!</p>	 <h2>ELEMENTOS DO CÍRCULO</h2>
<h3>CIRCUNFERÊNCIA</h3>  <p>Fórmula da circunferência</p> $C = 2\pi r$	<h3>SEMICÍRCULO</h3> <p>Metade do círculo delimitada por um diâmetro.</p> 
 <h2>A ÁREA DO CÍRCULO</h2> <p>DINÂMICA</p> <p>Link!</p>	<h3>SETOR CIRCULAR</h3> <p>"Fatia" do círculo entre dois raios e um arco.</p> 
<h3>CÍRCULO</h3> <p>Região do plano delimitada pela circunferência, incluindo todos os pontos internos a ela</p> 	<h3>COROA CIRCULAR</h3> <p>região do plano delimitada por duas circunferências de mesmo centro, uma delas inscrita na outra</p> 

Fonte: elaborada pelos autores do presente documento

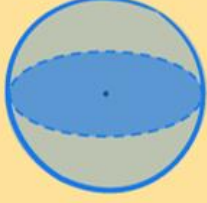
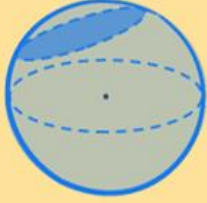


Figura 24 – Slides de 14/06/2025

<p>CÍRCULO E CIRCUNFERÊNCIA</p> <p>ANA, LETÍCIA E FELIPE</p> 	 <p>D = DIÂMETRO</p> <p>Segmento que passa pelo centro da circunferência e une dois pontos da circunferência; o dobro do raio; maior corda da circunferência</p>
 <p>ELEMENTOS DA CIRCUNFERÊNCIA</p>	<p>C = CIRCUNFERÊNCIA</p> <p>Conjunto de todos os pontos no plano que estão à mesma distância (raio) do centro</p> 
<p>R = RAIO</p> <p>Segmento de reta que liga o centro a um ponto qualquer da circunferência</p> 	 <p>UM ASPECTO IMPORTANTE DA CIRCUNFERÊNCIA</p> <p>DINÂMICA</p>
<p>S = CORDA</p> <p>segmento cujas extremidades pertencem à circunferência</p> 	<p>PI é um número com casas decimais infinitas</p> <p><u>3,1415926535 8979323846 2643383279...</u></p> <p>Nós e todo o mundo guardamos pi usando letra pra fazer numerais.</p> 

Fonte: elaborada pelos autores do presente documento

Figura 25 – Slides de 14/06/2025

<p>ÁREA DO CÍRCULO</p> <p>Fórmula da área do círculo</p> $A = \pi r^2$ 	<p>CÍRCULO MÁXIMO</p> <p>É o círculo que divide a esfera em duas partes iguais.</p> 
 <p>ELEMENTOS DA ESFERA</p>	<p>CÍRCULO MENOR</p> <p>Círculo traçado sobre uma superfície esférica cujo centro não coincide com o centro da esfera</p> 

Fonte: elaborada pelos autores do presente documento



1.7 Encontro 7 – 21/06/2025

1.7.1 Plano de Aula

Público-alvo: Alunos do Ensino Médio e ingressantes do Ensino Superior.

Professores: Letícia Gabryela Cordeiro Lang, Ana Cecília dos Santos Maciel e Felipe Cesar Muller Rio Branco.

Objetivo geral:

- Desenvolver a capacidade de identificação e análise dos elementos fundamentais de poliedros;
- Relacionar situações a seus conceitos matemáticos à suas aplicabilidades.
- Explicar os próprios raciocínios matemáticos.

Objetivos específicos:

- Reconhecer as formas geométricas espaciais que apresentam todas as faces planas, denominadas como poliedros;
- Identificar as formas geométricas espaciais por apresentarem três dimensões (comprimento, largura e altura);
- Diferenciar as formas geométricas espaciais, pela quantidade de lados e formato de bases;
- Compreender os conceitos e aplicabilidades do conteúdo de cálculos de área e volume de poliedros (geometria espacial).

Conteúdos: Poliedros, Área e volume de: pirâmides, cilindros e cones.

Tempo de execução:

1 encontro com duração de 4 horas aula.

Recursos didáticos:

Quadro, giz, folha A4, régua, tesoura, cola, fita durex, transferidor, compasso, projetor, notebook, caixa de som, massinha de EVA⁵, palitos de dente, folhas sulfites coloridas tamanho A4

Parte 1 (Duração: 10 minutos) – Preparação da sala

No primeiro momento, os professores irão receber os alunos com palavras de boas-vindas e, iniciar uma conversa sobre formas geométricas espaciais, perguntando a eles o que

⁵ EVA: Etileno Acetato de Vinila, é um tipo de espuma leve, flexível e resistente, amplamente utilizado.

entendem dos elementos, para que é necessário estudá-los e onde são aplicadas em nosso cotidiano.

Os professores esperam que os alunos comentem frases como: “figuras com vários lados que contém volume” “figuras com lados de diferentes formas geométricas” “Objetos como a bola, cone, pirâmides, caixas d’água, dados, embalagens de batata *Pringles*”.

Parte 2 (Duração: 30 minutos) – Apresentação dos conceitos e exploração com folha A4

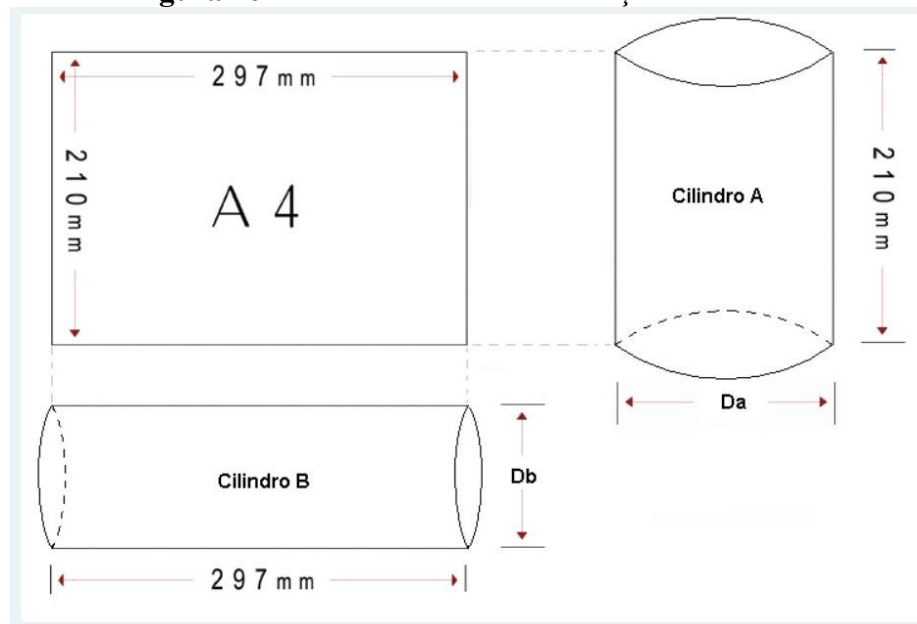
Neste momento, os professores irão apresentar aos alunos alguns conceitos importantes para a sequência da aula, como os seguintes:

- **Sólidos geométricos:** são figuras tridimensionais que ocupam espaço (têm comprimento, largura e altura), como: corpos redondos (faces curvas) e poliedros (faces planas)
- ***H*:** é a altura do poliedro;
- ***V*:** é o volume é a quantidade de espaço que um objeto ocupa, em uma caixa ou em uma garrafa;
- **Corpos redondos:** também chamados de sólidos de revolução, por serem construídos a partir da rotação de uma figura plana.
 - **Cilindro:** um objeto que possui duas bases circulares;
 - **Esfera:** objetos de corpos redondos e uniformes que têm um centro e todos os pontos da superfície à mesma distância desse centro ou menor.
 - **Cone:** um objeto que possui base circular e é construído a partir da rotação de um triângulo;
 - **Geratriz do cone:** todo segmento que parte do vértice e vá até a circunferência da base.
 - **Apótema:** é o segmento da reta que parte do vértice do triângulo (polígono) encontra um dos seus lados de forma perpendicular.

Posteriormente, será proposto aos alunos uma dinâmica, na qual será entregue uma folha A4 (297mmx210mm) e eles deverão construir um cilindro usando a folha, sem rasgar ou cortar a folha.



Figura 26 – Possibilidades da construção do cilindro



Fonte: tutorbrasil.com.br

Esta atividade busca mostrar aos alunos que as figuras podem ter volumes distintos (ou não necessariamente a mesma capacidade de volume) portanto, será feito um questionamento aos alunos: “Identifiquem e respondam qual dos cilindros tem o maior volume entre os dois formados na folha A4 entre o cilindro A e cilindro B”.

Continuando a aula, depois dos alunos discutirem sobre o tema, o professor mostrará a resolução do problema para demonstrar qual será a relação do volume dos dois cilindros.

Encontramos o valor do raio através do comprimento da circunferência do círculo da base, que terá comprimento do papel A4 (no caso do cilindro A o comprimento será 297mm e do B será 210mm). O comprimento da circunferência é dado pela fórmula: $C = 2\pi r$ na qual já foi deduzida e trabalhada em aulas anteriores.

$$C_A \rightarrow 297 = 2\pi r \rightarrow r = \frac{297}{2\pi} = \frac{297}{2 \times 3,14} \rightarrow r = 47,29mm$$

$$C_B \rightarrow 210 = 2\pi r \rightarrow r = \frac{210}{2\pi} = \frac{210}{2 \times 3,14} \rightarrow r = 33,44mm$$

Então obtemos as seguintes proporções de raio da circunferência $A = 33,44mm$ e o de $B = 47,29mm$ continuando a resolução do problema. Agora é so aplicar a fórmula do volume do cilindro em cada um dos cilindros:

$$V = \pi \cdot r^2 \cdot h$$

$$V_A = 3,14 \times (47,29)^2 \times 210 = 1474645,29mm^3$$

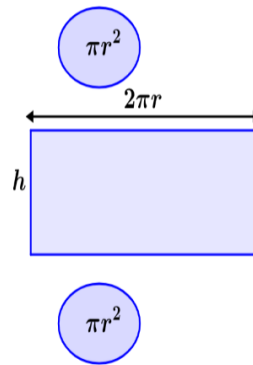
$$V_B = 3,14 \times (33,44)^2 \times 297 = 1042842,29mm^3$$

Parte 3 (Duração: 20 minutos) - Área do cilindro e sua planificação

Os professores utilizarão a mesma construção do cilindro anterior para continuar e, desta vez, partirão para a área do cilindro. Também será apresentada uma das maneiras de como chegar à área do cilindro a partir das fórmulas já trabalhadas.

A partir da figura 1, obtém-se à seguinte conclusão:

Figura 27 – Planificação do cilindro



Fonte: br.neurochispas.com

Área do círculo (área da base): πr^2 temos então 2 bases;

Área lateral: $2\pi r h$

Área total será, 2 vezes a área da base + área lateral

Ao obter os valores do raio do cilindro A e B da atividade passada, pode se concluir que:

$$r_A = 47,29mm \text{ e } r_B = 33,44mm$$

logo, é possível substituir na relação encontrada acima e obter a área das bases: πr^2

$$\text{ÁREA}_{BASE(A)} \rightarrow 3,14 \times (47,29)^2 \rightarrow 3,14 \times 2236,34 = 7022,14cm^2$$

$$\text{ÁREA}_{BASE(B)} \rightarrow 3,14 \times (33,44)^2 \rightarrow 3,14 \times 1118,23 = 3511,25cm^2$$

Para a área lateral do cilindro, a seguinte proporção pode ser usada: $2\pi r h$, logos obtém se:



$$\text{ÁREA}_{LATERAL(A)} \rightarrow 2 \times 3,14 \times 47,29 \times 210 \approx 62370\text{cm}^2$$

$$\text{ÁREA}_{LATERAL(B)} \rightarrow 2 \times 3,14 \times 33,44 \times 297 \approx 62370\text{cm}^2$$

Portanto, para calcular a área total, basta somar $2A_B + A_L = A_T$, e substituir na fórmula obtida:

$$\begin{aligned} 2\text{ÁREA}_{BASE(A)} + A_L \rightarrow A_T \rightarrow 2 \times 7022,14 + 62370 &= 14.044,28 + 62370 \\ &= \mathbf{76414,28\text{cm}^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2\text{ÁREA}_{BASE(B)} + A_L \rightarrow A_T \rightarrow 2 \times 3511,25 + 62370 &= 7.022,5 + 62370 \\ &= \mathbf{69392,50\text{cm}^2} \end{aligned}$$

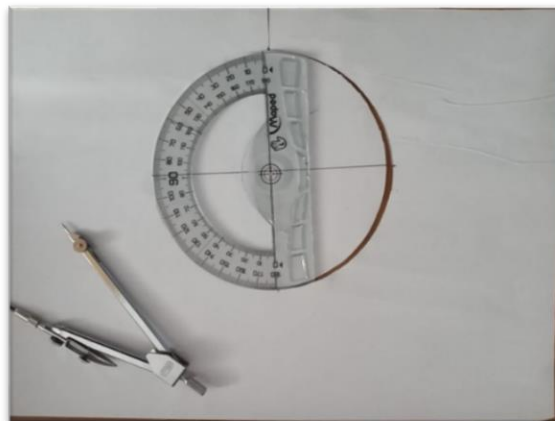
Conclui se que o volume do cilindro varia em função da área da base e da altura do poliedro.

Parte 4 (Duração: 20 minutos) – Dinâmica da construção do cone

Prosseguindo com a aula, será feita uma atividade em grupo de quatro alunos, na qual será aplicada uma dinâmica com o cone. Após a turma se organizar, o professor irá fornecer uma folha A4 para cada grupo. Em seguida, serão dadas as instruções oralmente para que os professores possam acompanhar o andamento de cada grupo, intervindo, quando necessário, para auxiliar na montagem do cone.

1º passo: Os alunos poderão utilizar o transferidor de 360° para realizar uma marcação na folha A4 ou outra tática escolhida, conforme demonstra a imagem (colocar o número da figura), o aluno poderá utilizar a técnica com a qual esteja familiarizado para recortar o círculo formado com diâmetro de 12cm para podermos trabalhar com todos, utilizando valores iguais.

Figura 28 – Construção do cone, passo 1



Fonte: elaborada pelos autores do presente documento

2º passo: Seguindo, será necessário dividir o círculo em quatro partes iguais, primeiramente fazendo marcações a lápis ou caneta, após será necessário recortar. Conforme demonstra as imagens a seguir, figura 4 e 5.

Figura 29 – Construção do cone, passo 2



Fonte: elaborada pelos autores do presente documento

Figura 30 – Construção do cone, passo 2

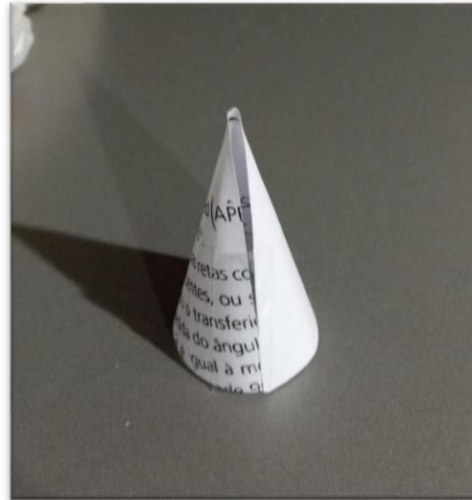


Fonte: elaborada pelos autores do presente documento

3º passo: Nessa parte será necessário cada aluno possuir $\frac{1}{4}$ do círculo obtido para realizamos a construção do cone; deverão ser coladas as duas laterais obtidas no corte de cada $\frac{1}{4}$ do círculo, conforme a figura 6 seguindo a construção do cone. Será utilizado também parte dos recortes feito na folha A4 para montar a base do cone.



Figura 31 – Construção do cone, passo 3



Fonte: elaborada pelos autores do presente documento

Após o poliedro ser montado, deverá ser obtido e ser anotado pelos alunos os valores das seguintes proporções já trabalhadas. Valor da circunferência obtida por meio da fórmula construída anteriormente:

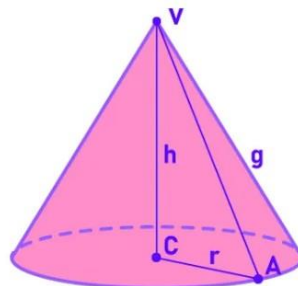
$$\text{Circunferência}_{\text{cone}} \rightarrow 2\pi \cdot r$$

Considerar o valor de $\pi \approx 3,14$

Obter o valor do raio da base do cone

Seguindo após a obtenção dos dados será feito os cálculos pelo professor demonstrando a relação dos dados obtidos, será então trabalhado com a lousa: Raio $\approx 1,5$ cm; Circunferência utilizando a fórmula 9,42 cm; Geratriz 6 cm, Altura calcularemos a partir a teorema de Pitágoras, seguindo então o seguinte raciocínio Então usando os dados já obtidos, raio igual a 1,5 cm e geratriz igual a 6 cm pois o raio da circunferência maior é igual a 6 cm logo acharemos o valor da altura com o teorema de Pitágoras.

Figura 32 – Elemento do cone



Fonte: brasilecola.uol.com.br

$G \rightarrow$ geratriz do cone

$C \rightarrow$ centro da circunferência

$R \rightarrow$ raio da base

$V \rightarrow$ vértice do cone

$H \rightarrow$ altura

$A \rightarrow$ ponto na circunferência

Utilizando o teorema de Pitágoras obtemos a seguinte relação:

$$g^2 = h^2 + r^2 \rightarrow 6^2 = h^2 + 1,5^2 \rightarrow 36 = h^2 + 2,25$$

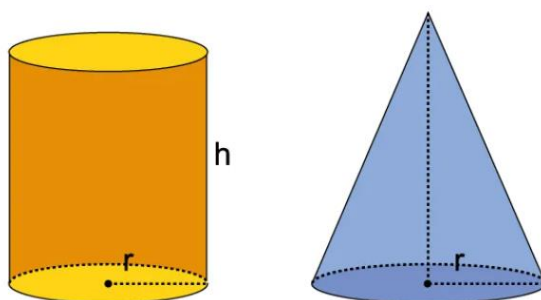
$$36 - 2,25 = h^2 \rightarrow h = \sqrt{33,75} \rightarrow h \approx 5,81 \text{ cm}$$

Após calcular os altura utilizamos a fórmula de volume que é o seguinte:

$$v = \frac{1}{3} \pi r^2 \times h$$

Como já calculamos o volume do cilindro podemos seguir a seguinte em relação:

Figura 33 – Comparação cilindro e cone



Fonte: mundoeducacao.uol.com.br

Podemos observar que o cone ocupa apenas 1/3 do cilindro por isso utilizaremos a fórmula de volume de cilindro multiplicado por um 1/3. Obtendo então apenas o volume de 1/3 do cilindro:

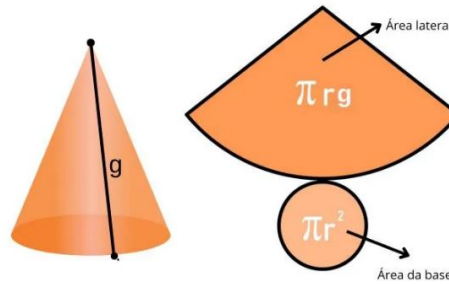
Então substituindo na fórmula os seguintes dados obteremos o volume do cone:

$$v = \frac{1}{3} \pi \cdot 1,5^2 \cdot 5,81 \rightarrow v = \frac{1}{3} \cdot 3,14 \cdot 2,25 \cdot 5,81 \rightarrow v = \frac{1}{3} \cdot 41,047 \rightarrow v \approx 13,682 \text{ cm}^3$$

A seguir será apresentado por um professor a área total do cone, sendo utilizado então a fórmula de obtenção de área da circunferência e a área lateral do cone:



Figura 34 – Cone



Fonte: preparaenem.com

Área da circunferência: πr^2

Área total: $\pi r^2 + g\pi r$

Área lateral: $g\pi r$

Substituímos na fórmula obtemos então:

$$\text{ÁREA}_{LATERAL} = g\pi r \rightarrow \text{Área lateral} = 6 \times 3,14 \times 1,5 \approx 28,26 \text{ cm}^2$$

$$\text{ÁREA}_{BASE} = \pi r^2 \rightarrow \text{Área da base} = 3,14 \times 1,5^2 \approx 7,065 \text{ cm}^2$$
$$\text{Área total} + \text{Área da base} \rightarrow \text{Á}_{TOTAL} = 28,26 + 7,065 \approx 35,325 \text{ cm}^2$$

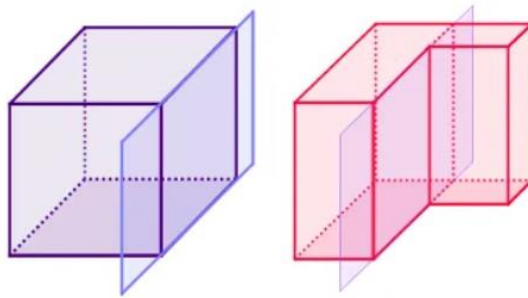
Parte 5 (Duração: 30 minutos) – Atividades

Neste momento, os professores disponibilizarão ajuda aos alunos para que as atividades determinadas, para que elementos apresentados até o momento sejam exercitados.

INTERVALO: 09h40min – 10h (20 minutos)

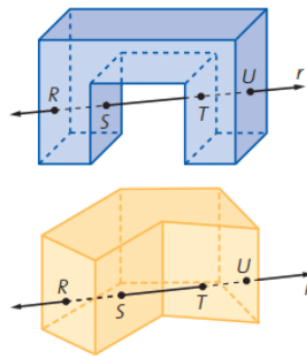
Parte 6 (Duração: 40 minutos) - Apresentação dos poliedros e suas classificações

- **Poliedro:** são sólidos com faces em formatos de polígonos.
- **Poliedros convexos:** são aqueles que um plano que contém uma face de um poliedro convexo nunca corta a outra face

Figura 35 – Poliedros convexos

Fonte: dex.descomplica.com.br









- **Poliedros não convexos:** um poliedro é classificado como não convexo se existe pelo menos um par de pontos, sejam eles localizados na superfície do poliedro ou em seu interior, tal que o segmento de reta que os une não esteja integralmente contido dentro ou sobre o próprio.

Figura 36 – Poliedros não-convexos

Fonte: dex.descomplica.com.br

- **Pirâmide:** um objeto que possui uma base e faces laterais triangulares no qual as arestas laterais se encontram em um único ponto.

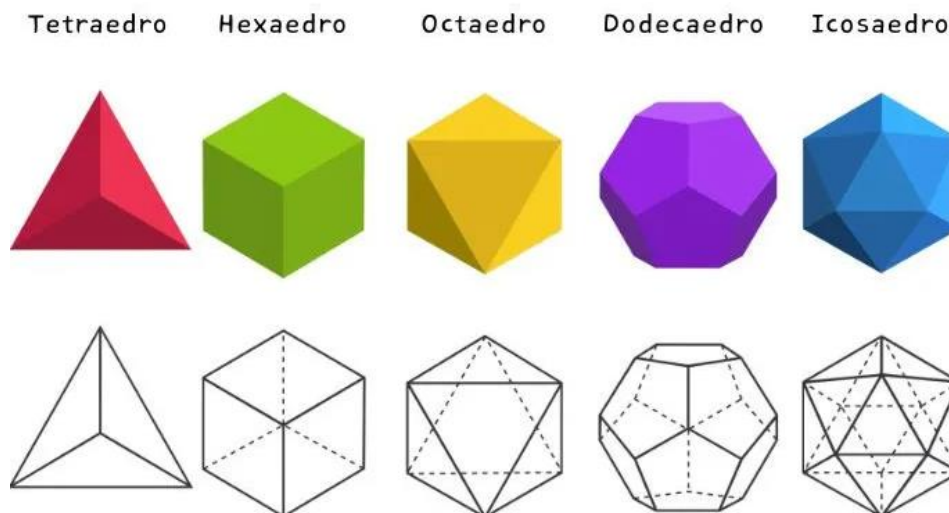
Figura 37 – Pirâmides: nomenclatura e algumas bases

Base	Pirâmides
 Triângulo	 Pirâmide triangular
 Rectângulo	 Pirâmide quadrangular
 Pentágono	 Pirâmide pentagonal
 Hexágono	 Pirâmide hexagonal

Fonte: revisaodoterceiro.blogspot.com

- **Poliedros regulares:** também conhecido como poliedros de Platão, são os poliedros que apresentam todas as faces com mesma área.

Figura 38 – Poliedros regulares de Platão



Fonte: mundoeducacao.uol.com.br

NOTA: Todo poliedro de Platão é regular, mas nem todo poliedro regular é um poliedro de Platão.

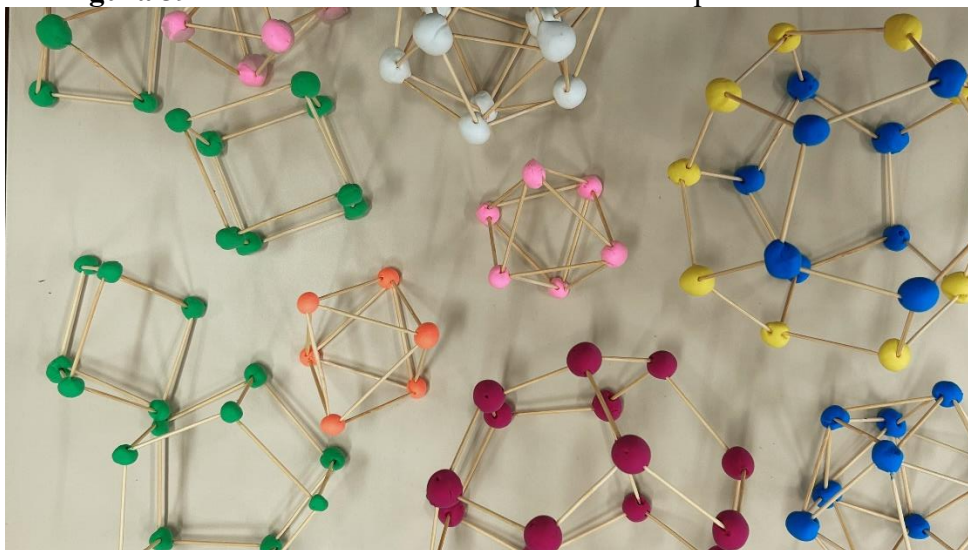
Parte 7 (Duração: 60 minutos) - Dinâmica exploratória da relação de Euler

Cada grupo receberá algumas unidades de massinha de EVA e o objetivo é construir poliedros utilizando palitos, e calcular a quantidade de vértices, faces e arestas, utilizando a tabela de atividades para anotar e conseqüentemente chegar à relação de Euler.

A dinâmica contará com uma premiação para o melhor poliedro da sala, com o intuito de incentivar os alunos a serem criativos com as cores, e explorarem bastante o material e os elementos disponibilizados.

A imagem da figura 12 representa uma possível representação do esperado.

Figura 39 – Atividade com massinha elaboradas por alunos



Fonte: elaborada pelos autores do presente documento (material produzido pelos alunos no encontro)

Os professores esperam que os alunos consigam identificar que a relação de Euler (ainda implícita) realmente pode ser aplicada a poliedros regulares e convexos. Posteriormente mostrarão a formalização da relação;

- **Relação de Euler:** Se V , A e F são, respectivamente, o número de vértices, arestas e faces de um poliedro convexo, então:

$$V - A + F = 2$$

Implica

$$V + F = 2 + A$$

Ao fim da dinâmica os professores realizarão a votação ao mais belo poliedro, que ocasionará na premiação do grupo vencedor.

Parte 9 (Duração: 5 minutos) - Despedida

Em sequência, os professores agradecerão a presença de todos, entregarão um doce como forma de agradecimento e incentivo, solicitarão ajuda para organizar a sala novamente e reforçarão que o grupo do Whatsapp foi criado para compartilharem as resoluções e os estudantes tirarem suas dúvidas.

Avaliação

Os alunos serão avaliados a partir da participação durante as atividades e a demonstração de compreensão referente ao conteúdo pela observação dos professores. Esta observação individual, torna possível visualizar e auxiliar cada aluno em suas dificuldades específicas, de forma que a aprendizagem ocorra num âmbito qualitativo.

1.7.2 Relatório

Iniciamos os preparativos da aula com a organização da sala, dispondo as carteiras em grupos de seis alunos, como habitualmente. O encontro contou com a presença de 19 estudantes.

A aula foi iniciada entregando aos alunos presentes uma folha sulfite de tamanho A4, com as seguintes medidas 210mm x 297mm. Apresentamos então duas possibilidades de construção de cilindros, na primeira juntamos os dois lados de 297mm e, na outra, quando juntamos os dois lados de 210mm e, então questionamos os presentes, se preenchêssemos este cilindro com algum material, em qual deles caberia mais? A resposta mais intuitiva dos alunos era que o volume fosse igual pois as medidas eram as mesmas.

Prosseguindo, pedimos que cada um escolhesse uma construção de cilindro e calculasse o raio da circunferência que formava a base. O intuito era que chegassem a dois valores para possíveis raios. Aqueles que escolhessem a circunferência equivalente a 297mm encontrariam um raio maior do que a circunferência de 210 mm. Utilizando as fórmulas já trabalhadas em aulas anteriores, muitos alunos demonstraram dificuldade pois havia necessidade de se trabalhar com números decimais e não inteiros, logo a atividade necessitou de uma base prévia de conhecimento para realizar as operações com essas medidas. Após todos terem calculado o raio do cilindro, partimos para o cálculo do volume do cilindro; exploramos a fórmula $V = \pi \cdot r^2 \cdot h$ para chegar ao volume que o cilindro suporta, explicamos que os poliedros são formas de obtidas a partir do giro em torno do eixo, pois partem dos polígonos acrescentando uma nova medida para que chegássemos ao 3d. Nesta parte da aula decidimos liberar o uso da calculadora para facilitar os cálculos ao encontrar o volume, devido à dificuldade já comentada. Como o objetivo principal não era trabalhar com os algoritmos, avaliamos a possibilidade do uso desta tecnologia. Mesmo liberado o uso da calculadora, alguns alunos preferiram calcular no papel. Visto que foram obtidos dois valores distintos para os raios. Ao aplicar os valores encontrados na fórmula foi percebido que o volume era diferente e não igual como muitos acreditavam ser, por ser algo intuitivo. Para concluir o experimento, formalizamos explicando que o volume dependerá das medidas, pois um cilindro com uma altura maior que outra não significará haver mais volume ao comparar com outro cilindro de raio maior.

Continuando com as atividades, notamos a necessidade de trabalhar a área total do cilindro, mesmo que, inicialmente, esse não era o objetivo. Percebeu-se que, se os alunos comparassem também as duas possibilidades de áreas, elas seriam diferentes, pois estariam utilizando valores distintos para os raios. Considerando as fórmulas já trabalhadas

$\text{Área}_{\text{Circulo}}: \pi \cdot r^2$ e $\text{Área}_{\text{Retângulo}}: l^2$ juntamente com os alunos, foram comparados. Percebeu-se que a área total dos dois possíveis cilindros também eram diferentes por utilizarem os valores obtidos para os raios.

Para prosseguir com a aula, decidimos por não trabalhar o cone. Assim como o cilindro, a ideia seria encontrar o volume, mas como os alunos estavam confusos com as apresentações e as relações na hora do cálculo dessas grandezas, achamos mais prudente investir tempo esclarecendo os cálculos da comparação entre os volumes dos cilindros.

Logo, utilizamos mais tempo que o esperado para desenvolver melhor as próximas atividades, exploramos com os alunos os elementos do cone formalizando-os por meio dos *slides*. Finalizando esta etapa, iniciamos a parte dos poliedros convexos e côncavos que infelizmente não tivemos a oportunidade de apresentar os poliedros de Platão os quais foram previamente introduzidos antes do intervalo com um contexto histórico do filósofo Platão e sua maneira de enxergar o mundo e a matemática.

Após o intervalo, aplicamos uma dinâmica, na qual era necessário construir poliedros utilizando palitos de dente representando as arestas e massinhas de EVA representando os vértices dos poliedros. O objetivo principal era que os estudantes notassem a relação de Euler ao construir os cinco poliedros regulares, os Poliedros de Platão, novamente os alunos apresentaram dificuldade em interpretar a atividade, e por fim, não anotaram os dados necessários (número de arestas, vértices e faces), bem como não conseguiam diferenciar e identificar quais elementos eram vértices e quais eram arestas.

Ao analisar a aula, notamos que os desafios enfrentados pelos alunos podem ter sido uma consequência da metodologia utilizada no encontro, demonstrando a necessidade de melhorar a comunicação e a transposição didática no processo. A maneira como apresentamos a atividade e discutimos os conceitos matemáticos pode não ter sido tão esclarecedor.

Para finalizar a aula, realizamos um concurso para que o pessoal avaliasse os poliedros construídos e decidissem qual o mais bonito, houve premiação para o grupo vencedor. Distribuimos um doce para agradecer a presença e nos despedimos dos alunos.

1.7.3 Materiais utilizados

Atividades 21/06/2025

Atividade 1- Questões sobre os conceitos apresentados.

- a) O que são sólidos geométricos? Quais são suas 2 classificações?
- b) O que são poliedros?
- c) O que são corpos redondos?
- d) Qual é a fórmula da área do cilindro? E do cone?
- e) O que são poliedros convexos?
- f) O que são poliedros não convexos?
- g) O que são poliedros regulares?

Atividade 2 – Relação de Euler

Forma	Faces	Vértices	Arestas

Qual relação pode ser estabelecida entre as características de cada figura?

Atividade 3 - Preencha a tabela a seguir.

Quantidade de faces	Nome
Quatro	
Cinco	
Seis	
Sete	
Oito	
Dez	
Doze	
Vinte	

Atividades Extras

1. Das alternativas seguintes, escolha aquela que não representa um corpo redondo.
 - a) esfera
 - b) cone
 - c) cilindro
 - d) círculo
 - e) tronco de cone

2. Leia cada afirmação abaixo e marque V para Verdadeiro ou F para Falso.
 - () Um cubo possui 12 arestas e 8 vértices.
 - () Uma pirâmide de base triangular tem 6 arestas no total.
 - () Um cilindro é um poliedro porque suas faces são todas planas.
 - () Duas retas reversas não são paralelas e nem se interceptam.
 - () A esfera é um sólido geométrico que não possui arestas nem vértices.
 - () Todas as arestas de um prisma reto são perpendiculares às bases.
 - () Um paralelepípedo é um prisma cujas bases são paralelogramos.
 - () A planificação de um cone inclui um círculo e um setor circular.
 - () Em um tetraedro regular, todas as faces são triângulos equiláteros.

3. Sobre os sólidos geométricos, julgue as afirmativas a seguir como verdadeiras ou falsas:
 - I. Os sólidos geométricos são divididos em poliedros e corpos redondos.
 - II. Pirâmides e trapézios são exemplos de poliedros.

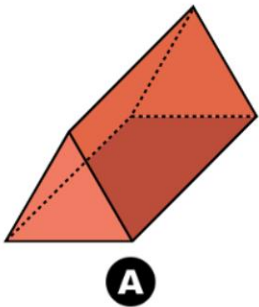
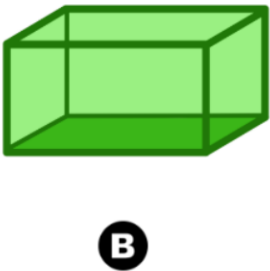
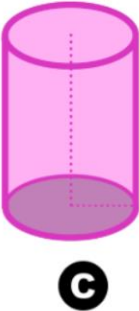

III. Esfera e cone são exemplos de corpos redondos.

Podemos afirmar que:

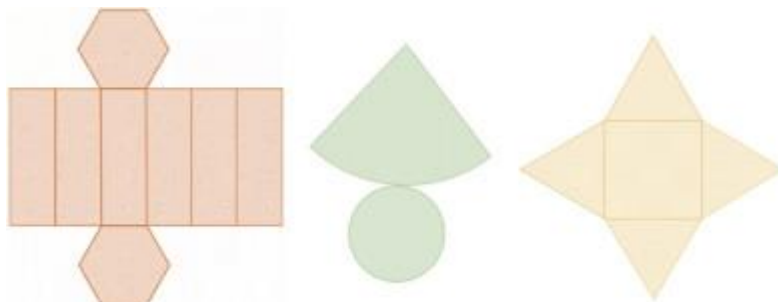
- (a) Somente I e II estão corretas.
- (b) Somente II e III estão corretas.
- (c) Somente I e III estão corretas.
- (d) Todas estão corretas.
- (e) Todas estão incorretas

4. Um poliedro convexo possui 12 faces, sendo 8 faces triangulares e 4 faces hexagonais. Determine o número de vértices desse poliedro.

5. Esboce a planificação de cada sólido a seguir:

			
A)	B)	C)	D)

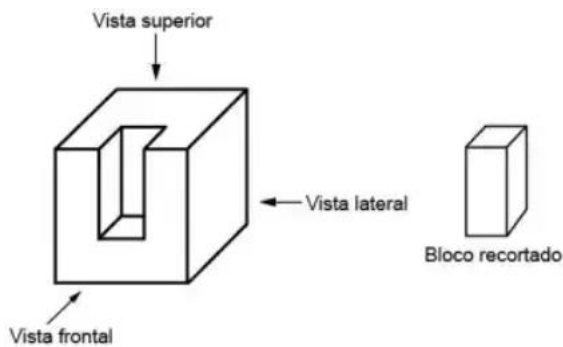
6. As planificações de três sólidos estão representadas a seguir:



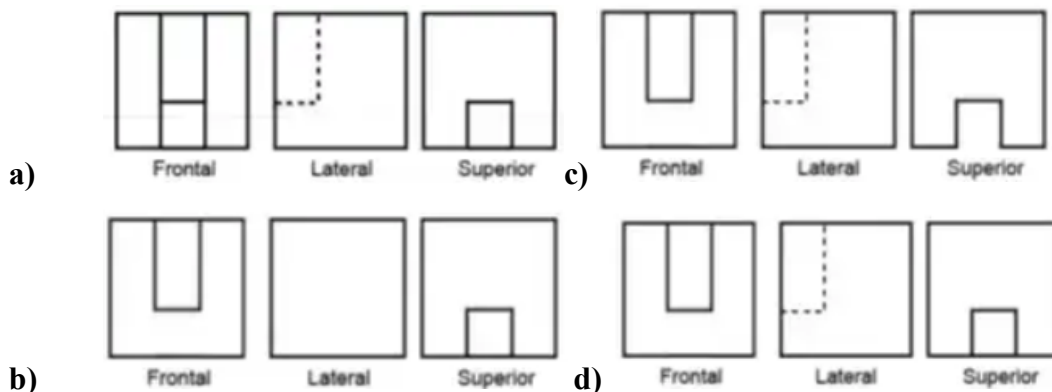
Analisando as imagens, os sólidos geométricos formados são, respectivamente:

- a) prisma de base pentagonal, cilindro e cubo.
- b) prisma de base retangular, cone e pirâmide de base quadrada.
- c) cubo, esfera e prisma de base triangular.
- d) prisma de base hexagonal, cone e pirâmide de base quadrada.
- e) paralelepípedo, cone e tetraedro.

7. (Enem Digital 2020) No projeto de uma nova máquina, um engenheiro encomendou a um torneiro mecânico a fabricação de uma peça, obtida a partir do recorte em um cubo, como ilustrado na figura. Para isso, o torneiro forneceu, juntamente com o desenho tridimensional da peça, suas vistas frontal, lateral e superior, a partir das posições indicadas na figura. Para facilitar o trabalho do torneiro, as arestas dos cortes que ficam ocultos nas três vistas devem ser representadas por segmentos tracejados, quando for o caso.



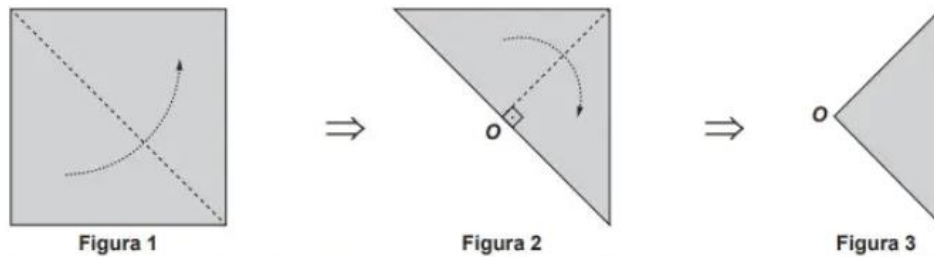
As vistas frontal, lateral e superior que melhor representam o desenho entregue ao torneiro são:



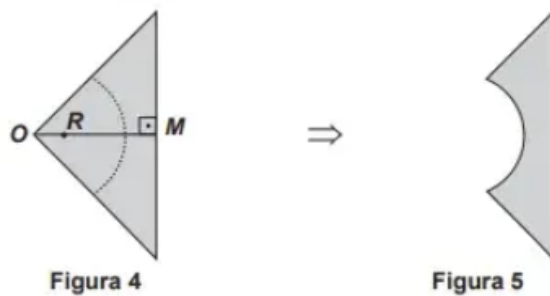
8. (Enem 2022) O professor de artes orientou seus estudantes a realizarem a seguinte sequência de atividades.

- Dobrar uma folha de papel em formato quadrado duas vezes, em sequência, ao longo das linhas

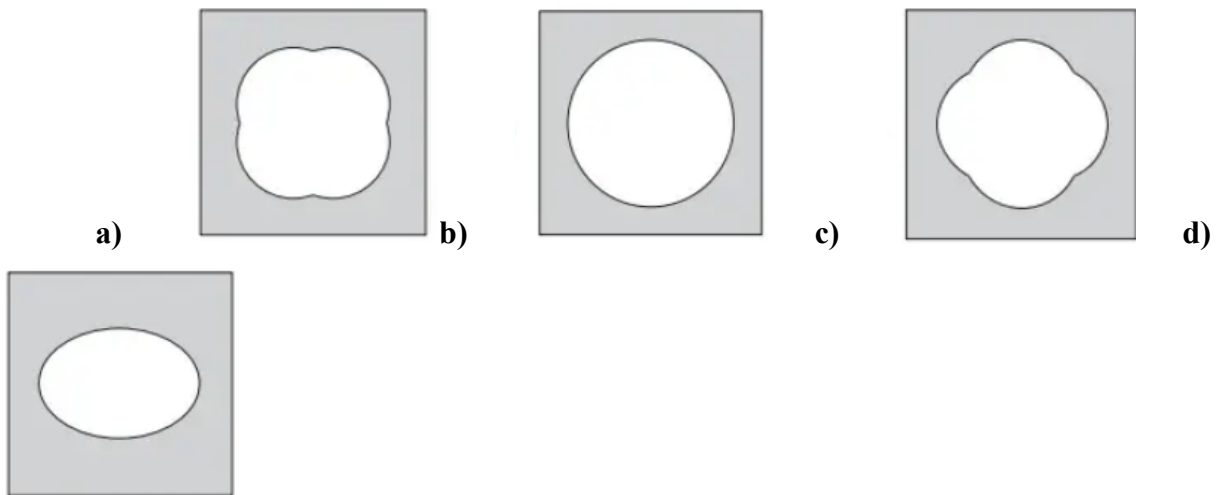
tracejadas, conforme ilustrado nas figuras 1 e 2, para obter o papel dobrado, conforme Figura 3.



- Em seguida, no papel dobrado da Figura 3, considerar o ponto R, sobre o segmento OM, sendo M o ponto médio do lado do quadrado original, de modo que $OR = 1/4 OM$, traçar um arco de circunferência de raio medindo $1/2 OM$ com centro no ponto R, obtendo a Figura 4. Por último, recortar o papel ao longo do arco de circunferência e excluir a parte que contém o setor circular, obtendo o papel dobrado, conforme Figura 5.



Após desdobrado o papel que restou na Figura 5, a figura plana que os estudantes obterão será



Caça Palavras

- Sólido com vinte faces triangulares.
- Sólido com faces planas.
- Soma de todas as faces da figura espacial
- Sólido com faces retangulares opostas.
- Sólido com duas bases paralelas e faces retangulares.
- Prisma com base em formato de triângulo.
- Quantia que "cabe" dentro da figura espacial.
- Cilindro com bases circulares.
- Forma com duas bases circulares e uma superfície curva.
- Esfera com interior oco.
- Pirâmide com base quadrada.
- Sólido com seis faces quadradas.
- Vai de um círculo a um ponto.
- Caso específico do paralelepípedo.

p	z	j	o	u	d	c	e	d	c	g	r	m	r	k
i	c	z	o	h	t	w	k	u	y	k	v	k	e	m
r	i	u	e	k	g	n	c	u	b	o	x	a	l	p
a	l	p	l	e	e	o	e	n	h	k	a	r	x	r
m	i	a	j	c	u	o	s	o	h	g	h	m	p	i
i	n	r	p	m	a	s	f	g	q	t	y	c	b	s
d	d	a	o	s	b	r	e	k	y	b	z	o	l	m
e	r	l	l	q	e	y	r	i	s	x	s	n	i	a
q	o	e	i	i	o	v	a	p	t	v	f	e	c	h
u	c	l	e	a	j	v	v	d	u	o	x	y	u	e
a	i	e	d	e	g	r	a	d	i	l	g	h	b	x
d	r	p	r	v	p	j	z	x	r	u	y	h	o	a
r	c	i	o	q	k	a	i	y	j	m	y	o	p	g
a	u	p	a	b	g	x	a	i	o	e	u	f	r	o
d	l	e	u	m	c	i	l	i	n	d	r	o	i	n
a	a	d	n	a	r	e	a	b	x	g	h	l	s	a
i	r	o	y	r	b	m	b	l	n	o	q	w	m	l
b	x	e	r	f	r	q	g	w	d	j	y	k	a	s

Respostas: 1 - d; 3 - c; 4 - 14; 6 - d; 7 - d; 8 - c-

SLIDES

Figura 40 – Slides de 21/06/25

GEOMETRIA ESPACIAL
Ana Cecília, Letícia e Felipe

SÓLIDOS GEOMÉTRICOS

Sólidos Geométricos
São figuras tridimensionais que ocupam espaço (têm comprimento, largura e altura). Existem vários tipos, como:

Poliedros (faces planas)
Corpos redondos (faces curvas)

CORPOS REDONDOS - REVOLUÇÃO

Definição
Sólidos geométricos que possuem superfícies curvas.
Cilindros
Cones
Esferas

Cilindro
Cone
Esfera

Cilindro
Duas bases circulares de mesmo raio (r).
Altura (h), é a distância entre os dois planos paralelos que contêm as bases.

Cone
Altura (h), é o segmento que sai do vértice e é perpendicular à base.
Vértice (v), é o ponto V , onde concorrem todos os segmentos de reta.

Fonte: elaborada pelos autores do presente documento

Figura 41 – Slides de 21/06/25

Cone
 Uma base circular de mesmo raio (r).
 Geratriz (g), é o segmento de reta que vai do vértice do cone até a circunferência da base.

Esfera
 Distância entre o centro (o) da esfera e qualquer ponto da sua superfície (r).
 Diâmetro (d) é o dobro do raio (r).

Volume do cilindro
 $V_{cilindro} = \pi \cdot r^2 \cdot h$

Sólidos platônicos

O **tetraedro** é o mais simples dos sólidos de Platão por ser o poliedro regular com o menor número de faces possíveis.
 Elemento fogo 🔥

Possui quatro faces no formato de um triângulo equilátero, quatro vértices e seis arestas.

Possui quatro faces no formato de um triângulo equilátero, quatro vértices e seis arestas.

Fonte: elaborada pelos autores do presente documento

Figura 42 – Slides de 21/06/25



Fonte: elaborada pelos autores do presente documento

Figura 43 – Slides de 21/06/25

Slide 1 (Top Left): O icosaedro que é um poliedro que possui faces 20 faces triangulares, 30 arestas e 12 vértices. Elemento água.

Slide 2 (Top Right): O dodecaedro é considerado o mais harmonioso. Possui 12 faces pentagonais, 30 arestas e 20 vértices. Elemento cosmo.

Slide 3 (Middle Left): O dodecaedro é considerado o mais harmonioso. Possui 12 faces pentagonais, 30 arestas e 20 vértices. Elemento cosmo.

Slide 4 (Middle Right): Relação de Euler. Estabelece uma correlação entre o número de faces, arestas e vértices de um poliedro.

Slide 5 (Bottom Left): Relação de Euler. Estabelece uma correlação entre o número de faces, arestas e vértices de um poliedro.

Slide 6 (Bottom Middle): Relação de Euler. Estabelece uma correlação entre o número de faces, arestas e vértices de um poliedro.

Slide 7 (Bottom Right): Relação de Euler. Estabelece uma correlação entre o número de faces, arestas e vértices de um poliedro. $V + F = 2 + A$

Fonte: elaborada pelos autores do presente documento

1.8 Encontro 8 – 28/06/2025

1.8.1 Plano de Aula

Público-alvo: Alunos do Ensino Médio e ingressantes do Ensino Superior.

Professores: Letícia Gabryela Cordeiro Lang, Ana Cecília dos Santos Maciel e Felipe Cesar Muller Rio Branco.

Objetivo geral:

- Desenvolver a capacidade de compreender e manipular polinômios e equações do primeiro grau;
- Relacionar situações-problema do cotidiano com representações algébricas;
- Expressar e justificar o raciocínio matemático utilizado na resolução de equações.

Objetivos específicos:

- Reconhecer os elementos de um polinômio (termos, coeficientes, variáveis e constantes);
- Compreender o conceito de equação do primeiro grau e sua estrutura;
- Resolver equações do primeiro grau com uma incógnita utilizando estratégias algébricas;
- Interpretar situações-problema que envolvem equações do primeiro grau;
- Aplicar os conhecimentos adquiridos na resolução de problemas contextualizados.

Conteúdos: Polinômios e equações do 1º grau

Tempo de execução:

1 encontro com duração de 4 horas aula.

Recursos didáticos:

Quadro, giz, folhas de atividades, cartelas de bingo, *software* para sortear os números das equações do bingo, Algeplan, *slides* para apresentar os elementos, milho para marcar nas cartelas os números sorteados e brindes para os ganhadores do bingo.

Parte 1 (Duração: 10 minutos) – Preparação da sala

No primeiro momento, os professores organizarão a sala em grupos de 6 alunos e irão receber os alunos com palavras de boas-vindas e, em seguida, entregarão as folhas de exercícios.

Parte 2 (Duração: 15 minutos) – Polinômios

A aula terá início com a apresentação do conteúdo por meio de *slides*, nos quais os professores introduzirão o conceito de polinômios e seus elementos. A apresentação será acompanhada de exemplos que visam facilitar a compreensão dos alunos.

Polinômios são expressões algébricas formadas pela adição ou subtração de monômios. **Monômios**, por sua vez, são expressões compostas pelo produto entre números reais conhecidos (coeficientes) e variáveis (incógnitas) com expoentes inteiros e não negativos.

Exemplos: $7y$ e $4x^2$

O número conhecido que multiplica a variável é denominado coeficiente, enquanto a parte composta pela variável e seu expoente é chamada de parte literal.

Conceitos fundamentais:

Termo: cada parcela da expressão algébrica separada pelos sinais de adição ou subtração
 $\rightarrow 4x^2, -3x, 7$

Coeficiente: número que multiplica a variável \rightarrow em $4x^2$, o coeficiente é 4

Expoente: valor que indica a potência da variável \rightarrow em x^2 , o expoente é 2

Grau do polinômio: maior expoente da variável presente nos termos \rightarrow grau 2 no polinômio $4x^2 - 3x + 7$

Na sequência, será realizada a apresentação do material manipulável Algeplan, com o objetivo de explorar os conceitos introduzidos de forma visual.

Parte 3 (Duração: 60 minutos) – Algeplan

Nesta etapa, os conceitos serão retomados por meio da manipulação das peças físicas do Algeplan, com apoio dos *slides*, que apresentarão a definição e a representação visual de cada peça. Durante a explicação, os professores conduzirão perguntas aos estudantes, solicitando que indiquem como calcular a área das figuras geométricas representadas pelo material.

Em seguida, os alunos serão desafiados a representar, utilizando o Algeplan, a expressão:

$$2x^2 + y^2 + 2xy$$

Essa expressão estará projetada no *slide*, e a solução será discutida coletivamente após os estudantes montarem sua representação com o material.

Na sequência, será proposta a representação da expressão:

$$x^2 - y$$

Assim como na anterior, a atividade será seguida da socialização da resposta com toda a turma.

Posteriormente, os alunos receberão novos polinômios para representar com o Algeplan. As expressões são:

1. $3y^2$
2. $(3x^2 - x + 4) + (-x^2 - x - 1)$
3. $x^2 + 2xy + y^2$
4. $(x + y)(x + y)$
5. $x^2 - 2xy + y^2$
6. $(x - y)(x - y)$
7. $(x + y)(x - y)$

Após o tempo para a montagem, as representações corretas serão projetadas nos *slides* para que os alunos possam comparar com suas construções e corrigir, se necessário.

Em especial, nas expressões 3 e 4 — $x^2 + 2xy + y^2$ e $(x + y)(x + y)$ — os alunos poderão observar que utilizaram as mesmas peças, o que favorece a construção do conceito do quadrado da soma, nas expressões 5 e 6 — $x^2 - 2xy + y^2$ e $(x - y)(x - y)$ — o quadrado da diferença, e na expressão 7 — $(x + y)(x - y)$ — o produto da soma pela diferença.

Finalizando essa parte, os estudantes deverão registrar em seus cadernos a reescrita das seguintes expressões, colocando fatores em evidência:

$$\begin{aligned} & ax^2 + 2ax - 3ax^2 + ax \\ & ay^3 + 4by - 16by + 5ay^3 \\ & by + ax + bx + ay \end{aligned}$$

As respostas dessas expressões fatoradas também estarão disponíveis nos *slides*, e serão discutidas com a turma para garantir a compreensão do conteúdo.

Caso haja tempo disponível, os alunos darão continuidade à resolução das atividades propostas na lista de exercícios.

INTERVALO: 09h40min – 10h (20 minutos)

Parte 4 (Duração: 25 minutos) – Formalização de uma equação do 1º grau

- **Equação:** Toda sentença matemática expressa por uma igualdade, na qual haja um ou mais símbolos que representam números desconhecidos, é denominada **equação**.

Cada símbolo que representa um número desconhecido chama-se **incógnita**.

Toda equação que pode ser reduzida à forma $ax + b = 0$, em que x representa a incógnita e $a, b \in \mathbb{R}$, com $a \neq 0$, é denominada equação do 1º grau na incógnita x .

Para resolver uma equação, precisamos encontrar um valor para a incógnita que satisfaça a igualdade. Uma forma de fazer isso é isolando a incógnita em um dos membros da equação. O valor encontrado é chamado de **solução** ou **raiz** da equação.

Nos *slides* os professores representarão as equações com balanças, com o intuito de reforçar que equações representam uma igualdade entre dois “lados”, e assim proporcionar aos estudantes a oportunidade de entender que essa igualdade deve ser mantida ou respeitada, para que a balança continue da mesma forma que no início, equilibrada.

Os exemplos serão selecionados daqueles que posteriormente estarão contidos na atividade do Bingo das equações.

Parte 5 (Duração: 25 minutos) – Atividades de equação do 1º grau

Os exercícios mencionados estarão disponíveis na folha de atividades entregue no primeiro momento da aula.

Parte 6 (Duração: 30 minutos) – Jogo Bingo das equações do 1º grau

Os professores disponibilizarão as cartelas do Bingo aos alunos, com o resultado das equações. Desta forma, escreveremos as questões no quadro, que eles devem resolver. Se a resolução estiver correta, marcam a pedra, e vence quem completar uma linha, uma coluna, uma diagonal ou os quatro cantos da cartela.

As equações a serem resolvidas são as seguintes:

- | | |
|------------------------------------|---|
| 1) $2x + 7 = -17; x = -12$ | 7) $2x + 7 = 36 + 3; x = 16$ |
| 2) $7x - 45 = 2x - 45; x = 0$ | 8) $2x - 70 = -3x + 105; x = 35$ |
| 3) $2x + 7 = -27; x = -17$ | 9) $\frac{x}{12} + 1 = \frac{48}{12} + 1; x = 48$ |
| 4) $2x - 16 = 50; x = 33$ | 10) $3x + 24 = 186; x = 54$ |
| 5) $2x - 7 = -36 - 3; x = -16$ | 11) $2x + 24 = 4x - 12; x = 18$ |
| 6) $2x - 5 = 3x + 10 - 2; x = -13$ | 12) $5x - 20 = 3x + 8; x = 14$ |

- 13) $3x + 8 = 4x - 7; x = 15$
- 14) $x - 5 = 31; x = 36$
- 15) $3x - 30 = 2x + 16; x = 46$
- 16) $-2x + 12 = -4x - 18; x = -15$
- 17) $3x - 4 = 34 + x; x = 19$
- 18) $7x + 25 = 2x - 45; x = -14$
- 19) $\frac{x}{7} = 105 - 2x; x = 49$
- 20) $8x + 80 = -2x - 120; x = -20$
- 21) $2x = +x - 18; x = -18$
- 22) $4x - 5 = 75; x = 20$
- 23) $5x - 5 = 60; x = 13$
- 24) $3x + 2 = 95; x = 31$
- 25) $\frac{x}{5} = 10; x = 50$
- 26) $4x - 68 = 0; x = 17$
- 27) $\frac{x}{2} + 2x = 95; x = 38$
- 28) $5x + 25 = 150; x = 25$
- 29) $x - 15 = 10 + 26; x = 51$
- 30) $5x + 75 = 180; x = 21$
- 31) $2x - 3x = 3x - 4; x = 1$
- 32) $-3 = x + 1; x = -4$
- 33) $\frac{x}{22} + 2 = 4; x = 44$
- 34) $5x + 17 = 27 + 3x; x = 5$
- 35) $60 + 36x = 30x; x = -10$
- 36) $2x - 110 = -3x; x = 22$
- 37) $10x + 16 = 14x + 8; x = 2$
- 38) $3x + 5 = 2; x = -1$
- 39) $6x = 2x + 28; x = 7$
- 40) $x - 2x + 11 = 22; x = -11$
- 41) $x + 15 = 38; x = 23$
- 42) $3x - 5 = 13; x = 6$
- 43) $\frac{x}{3} + 26 = 39; x = 39$
- 44) $5x - 1 = 8x + 5; x = -2$
- 45) $2x + 6 = x + 18; x = 12$
- 46) $x + 3 = 27; x = 24$
- 47) $3x = -27; x = -9$
- 48) $x - 9 = -1; x = 8$
- 49) $\frac{x}{10} - 2 = 2; x = 40$
- 50) $x - 1 = -8; x = -7$
- 51) $\frac{x}{2} - 5 = 8; x = 26$
- 52) $2x + 7 = -31; x = -19$
- 53) $2x + 23 = 105; x = 41$
- 54) $2x - 3 = 17; x = 10$
- 55) $2x = 54; x = 27$
- 56) $3x - 5 = 136; x = 47$
- 57) $5 + 6x = 5x + 2; x = -3$
- 58) $\frac{x}{26} = 2; x = 52$
- 59) $4x - 8 = 3x + 3; x = 11$
- 60) $\frac{x}{4} + 7 = 14; x = 28$
- 61) $\frac{2x+10}{5} = x - 45; x = 53$
- 62) $7x + 14 = 4x - 10; x = -8$
- 63) $\frac{x}{3} - 14 = 0; x = 42$
- 64) $2x = -3x + 15; x = 3$
- 65) $4x + 10 = x - 8; x = -6$
- 66) $x - 8 = 1; x = 9$
- 67) $x + 43 - 11 = 61; x = 29$
- 68) $15 = x + 20; x = -5$
- 69) $x + 0 = 43; x = 43$
- 70) $5x - 3 = 2x + 9; x = 4$
- 71) $x + 24 + x = 92; x = 34$
- 72) $\frac{3x}{3} = \frac{90}{3}; x = 30$
- 73) $3x = 135; x = 45$
- 74) $2x - 37 = x; x = 37$
- 75) $8x + 5 = 261; x = 32$



A cartela será disponibilizada da seguinte forma:

Figura 44 – Cartela de Bingo

B	I	N	G	O
-15	-4	11	27	42
-12	0	16	30	47
-8	3	π	32	50
-6	5	21	35	53
-1	8	25	38	54

Fonte: Dos autores 2025

Os critérios para definir o ganhador, serão definidos pelos professores no momento da dinâmica para adaptá-los ao tempo, pois o foco da aula é a resolução de exercícios.

Parte 9 (Duração: 5 minutos) - Despedida

Em sequência, os professores agradecerão a presença de todos, entregarão um doce como forma de agradecimento e incentivo, solicitarão ajuda para organizar a sala novamente e reforçarão que o grupo do Whatsapp foi criado para compartilharem as resoluções e os estudantes tirarem suas dúvidas.

Avaliação

Os alunos serão avaliados a partir da participação durante as atividades e a demonstração de compreensão referente ao conteúdo pela observação dos professores. Esta observação individual, torna possível visualizar e auxiliar cada aluno em suas dificuldades específicas, de forma que a aprendizagem ocorra num âmbito qualitativo.

1.8.2 Relatório

Iniciamos os preparativos da aula com a organização da sala, dispondo as carteiras em grupos de seis alunos, como habitualmente. O encontro contou com a presença de 19 estudantes.

Iniciamos a aula expondo os conceitos de monômios e polinômios por meio dos *slides*, e apresentamos de forma visual a completção de quadrado, o quadrado da soma e da diferença. Após a apresentação os alunos partiam para a prática utilizando o material do Algeplan, (figuras geométricas manipuláveis que representam os monômios). Deveriam representar geometricamente os polinômios escolhidos que foram dificultando-se, gradualmente.

Durante a execução com o material Algeplan houve muitas dúvidas e atendemos cada aluno individualmente para solucioná-las visando maior compreensão, a questão de soma e subtração foram relações mais tranquilas de compreensão e a realização foram mais facilmente assimiladas. Porém na multiplicação houve dúvidas, pois, a ideia de multiplicação utilizando o Algeplan não estava muito clara. Para a multiplicação de monômios, foi demonstrado aos alunos duas possibilidades: a primeira seria realizar a distribuição da multiplicação, tal como: $(x + 1) \cdot (x - 1) = (x^2 - x + x - 1)$ na qual seria utilizado o resultado para selecionar as peças do material e montar o quadrado; a segunda possibilidade constituía-se em utilizar $(x + 1)$ como lado do quadrado, e o outro lado como $(x - 1)$. E então a área deste quadrado resultaria em $(x^2 - x + x - 1)$. O processo é diferente, um feito no papel e outro diretamente com as peças do Algeplan.

Prosseguimos a aula com o Bingo de equações, o qual tinha como objetivo a resolução de equações para obtenção do número sorteado no bingo; por exemplo: $x + 5 - 7 = 1 \rightarrow x = 3$, logo o número a ser marcado é três. O intuito do bingo era que os alunos realizassem vários cálculos para tirarem dúvidas dos conceitos apresentados anteriormente, para que pudéssemos avaliar o processo, se houve aprendizagem ou não. Até o momento final da aula, fomos sorteando as equações e auxiliando os alunos a resolverem-nas

1.8.3 Materiais utilizados**Atividades 28/06/2025**

Atividade 1- Questões sobre os conceitos apresentados.

- a) O que são polinômios?
- b) O que são equações?
- c) O que difere um polinômio de uma equação?
- d) Qual os elementos necessários para compor uma equação do primeiro grau?

Atividades Extras**Polinômios:**

1. Coloque os fatores comuns em evidência:

a) $ax^2 + 2ax - 3ax^2 + ax$

b) $ay^3 + 4by - 16by + 5ay^3$

c) $by + ax + bx + ay$

2. Considere os polinômios a seguir. Calcule o polinômio resultante da adição $P(x) + Q(x)$?

a) $P(x) = 3x^2 + 5x + 7$ e $Q(x) = 2x^2 + 4x + 3$.

b) $P(x) = 4x^3 + 3x^2 - 2x + 1$ e $Q(x) = -x^3 + 5x^2 + x - 4$.

c) $P(x) = 7x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 4x + 6$ e $Q(x) = -2x^4 + 4x^3 - x^2 - 8x$.

3. Considere os polinômios a seguir. Encontre o polinômio resultante da subtração $P(x) - Q(x)$?

a) $P(x) = 7x^2 + 3x + 2$ e $Q(x) = 11x^2 + 2x + 5$.

b) $P(x) = 5x^3 + 2x^2 - x + 1$ e $Q(x) = -2x^3 + 3x^2 + x$.

c) $P(x) = 8x^4 - 4x^3 + 6x^2 + 6$ e $Q(x) = -2x^4 + 4x^3 - x^2 - 8x$.

4. Efetue as multiplicações:

a) $(2x + 3)^2$

b) $(x - 4)^2$

c) $(8 - 5)^2$

d) $(a + b)^2$

e) $(x^2 - 6)^2$

f) $(7 + 3)(7 - 3)$

g) $(x + 5)(x - 5)$

h) $\left(y + \frac{1}{2}\right)^2$

i) $(y + 2)^2 + (y + 1)^2$

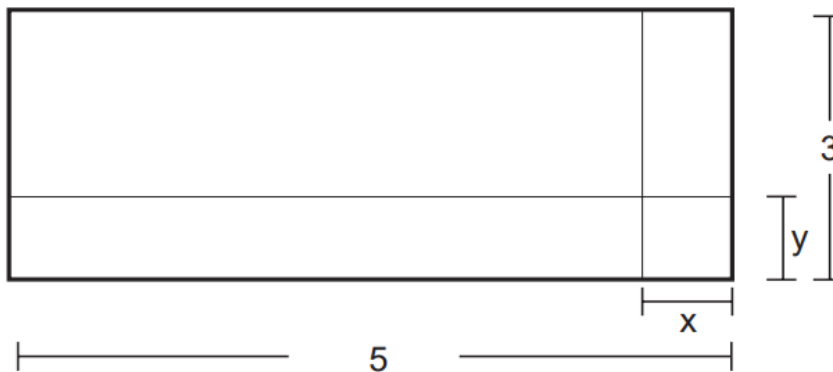
5. Fatore os seguintes polinômios:

a) $2x^2 + 4x^3 + 6x^4 + 8x^5$

b) $2b^2 + 6b - 8$

c) $49x^2 + 7b - 21$

6. (Enem - 2012) Um forro retangular de tecido traz em sua etiqueta a informação de que encolherá após a primeira lavagem mantendo, entretanto, seu formato. A figura a seguir mostra as medidas originais do forro e o tamanho do encolhimento (x) no comprimento e (y) na largura. A expressão algébrica que representa a área do forro após ser lavado é $(5 - x)(3 - y)$.



Nessas condições, a área perdida do forro, após a primeira lavagem, será expressa por:

(a) $2xy$

(d) $-5y - 3x$

(b) $15 - 3x$

(e) $5y + 3x$

(c) $15 - 5y$

7. Uma loja criou uma tabela que informa o valor em reais do *cashback* conforme o valor gasto na compra. O valor do *cashback* pode ser utilizado pelo cliente na próxima compra como desconto.

Cashback da loja	
Valor da compra	Valor do <i>cashback</i>
R\$ 50,00	R\$ 2,50
R\$ 100,00	R\$ 5,00
R\$ 200,00	R\$ 10,00
R\$ 1.000,00	R\$ 50,00

- a) Qual expressão matemática se pode construir para representar o valor do *cashback* sendo x o valor gasto em reais na compra?
- b) Analisando a tabela, percebemos o padrão usado para calcular o *cashback* de determinada compra. Com base nessa análise, o que podemos dizer que ocorre com o *cashback* quando se dobra o valor de uma compra? E o que ocorre se o valor da compra for reduzido à terça parte?
- c) Qual é o valor, em reais, de uma compra que gerou um *cashback* de 28 reais para um cliente?
- d) Qual é a porcentagem que o valor do *cashback* representa em relação ao valor gasto?
8. (Enem 2019) Uma empresa tem diversos funcionários. Um deles é o gerente, que recebe R\$ 1.000,00 por semana. Os outros funcionários são diaristas. Cada um deles trabalha 2 dias por semana, recebendo R\$ 80,00 por dia trabalhado. Chamando de X a quantidade total de funcionários da empresa, a quantia Y , em reais, que esta empresa gasta semanalmente para pagar seus funcionários é expressa por:
- (a) $Y = 80X + 920$.
- (b) $Y = 80X + 1\ 000$.
- (c) $Y = 80X + 1\ 080$.
- (d) $Y = 160X + 840$.

(e) $Y = 160X + 1\,000$.

Equações:

1. Encontre o valor de x ao resolver as seguintes equações do primeiro grau com uma incógnita:

a) $4x + 2 = 38$

c) $5x - 1 = 3x + 11$

b) $9x = 6x + 12$

d) $2x + 8 = x + 13$

2. Dentro do conjunto universo \mathbb{Q} , resolva a equação do 1º grau: $4(x - 2) - 5(2 - 3x) = 4(2x - 6)$

3. Determine a solução da equação do 1º grau:

$$\frac{4x + 2}{3} - \frac{5x - 7}{6} = \frac{3 - x}{2}$$

4. Monte as equações que representam as sentenças a seguir e encontre o valor desconhecido.

a) 6 unidades somadas ao dobro de um número é igual a 82. Qual é esse número?

b) Um retângulo com 100 cm de perímetro apresenta a medida do lado maior com 10 cm a mais que o lado menor. Quanto mede o lado menor dessa figura geométrica?

5. **(Fuvest-SP)** A soma de um número com sua quinta parte é 2. Qual é o número?

6. **(CEFET/RJ - 2ª fase - 2016)** Carlos e Manoela são irmãos gêmeos. A metade da idade de Carlos mais um terço da idade de Manoela é igual a 10 anos. Qual é a soma das idades dos dois irmãos?

7. **(FAETEC - 2012)** Carlos resolveu, em um final de semana, 36 exercícios de matemática a mais que Nilton. Sabendo que o total de exercícios resolvidos por ambos foi 90, o número de exercícios que Carlos resolveu é igual a:

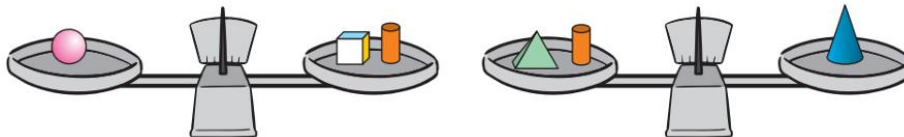
a) 63

b) 54

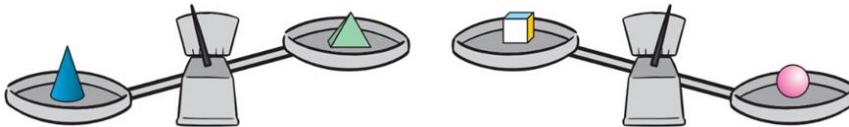
c) 36

d) 27

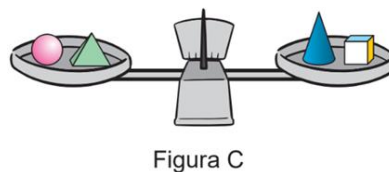
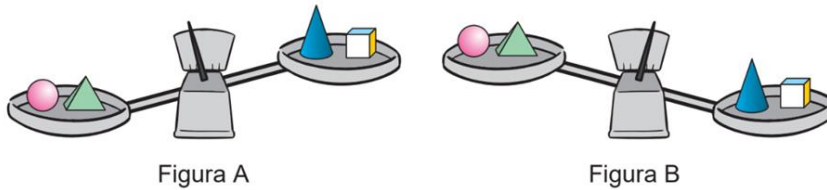
8. (OBMEP 2019) - Paulinho tem peças com cinco formas diferentes (cubos, pirâmides, esferas, cilindros e cones). Peças com a mesma forma têm o mesmo peso (massa). Ele coloca algumas peças numa balança de pratos e observa o equilíbrio nas duas situações abaixo.



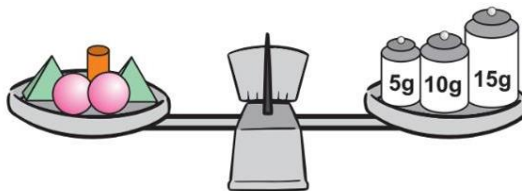
a) Indique se as figuras abaixo representam situações certas ou erradas.



b) Qual das figuras abaixo representa a situação correta?

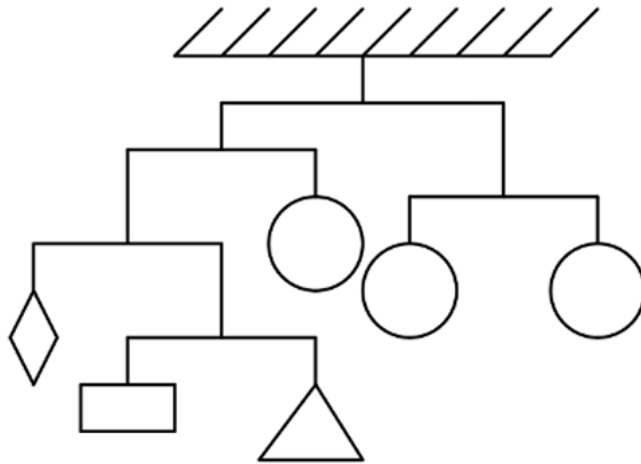


c) Com alguns pesos conhecidos, Paulinho observou a situação de equilíbrio abaixo. Quanto pesam, juntos, um cubo, uma pirâmide, uma esfera, um cilindro e um cone?



9. (OBMEP - 2015) A figura abaixo, representa um conjunto de pesos suspensos em equilíbrio. Se o círculo pesa 40 g, quanto pesa o retângulo?

Observação: Você deve desconsiderar o peso das barras horizontais e dos fios.



Caça-Palavras

1. Conjunto de duas ou mais equações.
2. Valor que satisfaz a equação.
3. Representação visual de uma equação.
4. Expressão que compara valores de forma não igual.
5. Símbolo que representa um valor desconhecido.
6. Conjunto de valores possíveis para a variável.
7. Ajustar os lados da equação para que sejam iguais.
8. Relação entre duas quantidades.
9. Operação que separa um valor em partes iguais.
10. Operação que soma valores.
11. Número que multiplica uma variável.
12. Tipo de equação que forma uma linha reta.
13. Redução de uma equação a uma forma mais simples.
14. Relação matemática que iguala duas expressões.

O C Q T D Q L Z F H W Q Y F E K R B X D Q F Y Z J K K W S N
O A S I V I D X D O M I N I O H R U O A Ç A O N B V M K U H
P V Ç O A Ç U L O S A B F Z A G P X V L D O L M T F F K V W
V R A I V D A E Q V T D O F W H P T D O U Q D M H R S O J V
Q U V Y V P W Q I K F R A Z A O N B M Y Z P H V S S E M S P
X N C N V S B N M Z J Y H X Ç E E Q K G T E N D I P O G N Y
K G K A I W K H D D O Q W A N S F U K C J Q V F M Y H X X U
T N U D Q B R Z E P H F C E D P L Ç F U G K Y C P O T D V V

E	Q	U	I	L	I	B	R	A	R	Z	H	R	G	G	G	C	P	Q	K	D	A	S	F	L	E	E	A	Q	X
K	R	L	G	H	V	M	M	Q	K	E	W	X	V	A	R	I	A	V	E	L	I	E	T	I	L	R	J	L	Ç
P	T	P	P	X	I	J	V	A	X	A	O	Y	K	E	D	R	A	X	B	F	K	U	V	F	R	R	U	H	Y
W	X	B	R	Y	W	A	U	Q	A	I	X	F	R	V	E	L	A	N	V	M	Z	M	P	I	F	T	C	Q	C
P	S	Z	O	X	P	K	E	E	Z	G	S	Q	Y	B	P	D	I	R	R	Z	J	R	K	C	R	I	T	U	E
V	K	Y	R	P	V	U	V	T	O	C	Z	L	H	D	Y	A	M	R	R	M	P	G	L	A	E	U	O	B	H
Q	X	E	Z	D	E	S	M	Ç	U	O	H	Q	D	V	V	M	T	P	T	K	X	W	Ç	F	C	Z	K	P	
H	C	L	X	F	X	R	N	E	G	E	L	M	U	Q	O	G	H	E	Q	I	U	W	G	A	S	U	X	K	O
P	V	Z	F	I	W	E	T	I	T	W	F	Q	D	A	Q	W	D	G	T	P	U	X	W	O	Z	M	C	I	J
Z	G	S	N	O	C	T	W	C	S	Z	R	D	N	Z	L	B	Y	M	X	S	G	U	K	F	B	R	D	M	N
W	Q	A	I	S	O	O	I	I	J	K	Y	P	J	L	M	B	K	O	A	Z	I	V	Q	Q	Q	Y	H	D	N
O	T	D	O	E	Y	M	M	F	K	E	X	J	O	X	D	L	K	H	N	M	G	S	O	Q	N	A	G	C	Z
E	V	D	Z	R	I	U	N	E	G	H	P	J	T	D	O	O	H	V	D	A	Y	H	B	M	A	K	X	I	F
Y	K	O	S	Z	E	L	L	O	Y	W	L	T	B	A	H	R	W	O	R	Q	A	D	I	Ç	A	O	X	L	H
S	D	A	H	E	V	X	Ç	C	V	V	D	M	A	Z	Z	N	C	Q	F	U	R	L	S	P	K	E	K	Y	J
A	B	Ç	R	I	F	P	Q	C	Z	G	R	V	K	K	L	I	I	P	S	Z	I	V	R	K	V	P	Z	F	C
O	I	A	S	E	M	F	U	D	S	Z	V	V	R	C	F	N	J	Y	E	E	O	B	Z	Z	O	O	X	P	P
G	A	U	C	D	N	X	A	Q	P	T	W	N	M	A	J	W	C	V	R	F	D	Y	A	O	Z	L	W	O	B
A	K	Q	T	J	X	Y	Q	T	H	F	U	K	R	X	A	R	K	W	M	B	A	M	U	R	A	E	N	I	L
W	Z	E	F	K	H	T	E	O	U	I	C	G	V	T	H	H	Y	E	L	E	Q	K	P	L	S	M	Z	P	W
Ç	U	G	L	E	Y	Z	Z	Z	O	S	C	X	G	O	M	Z	C	U	P	Z	P	Ç	Y	I	M	K	X	Y	W
U	M	V	L	Y	Q	E	D	A	D	L	A	U	G	I	S	E	D	N	H	K	N	J	J	I	X	P	B	C	I

Respostas polinômios: 4 – e ; 6 – d.

Respostas equações: 7 – a ;









SLIDES

Figura 45 – Slides 28/06/2025

The figure displays six slides from a presentation. The top-left slide is the title slide, 'ENCONTRO 08/10 POLINÔMIOS E EQUAÇÕES', by Ana Cecília | Letícia | Felipe. The top-right slide is '01 Os polinômios', defining them as algebraic expressions formed by the addition of monomials. The middle-left slide, 'Monômios', explains they are products of numbers and variables, with examples $7y$ and $4x^2$. The middle-right slide, 'Conceitos Importantes', defines 'Termo' (e.g., $4x^2$, $-3x$, 7), 'Coeficiente' (number multiplying the letter), 'Expoente' (number above the letter), and 'Grau do polinômio' (highest exponent). The bottom-left slide, 'Conhecendo o Algeplan', shows a bar chart with six colored bars of varying heights. The bottom-middle-left slide, 'Quadrado x^2 ', shows a yellow square with side length x and area $x \cdot x = x^2$. The bottom-middle-right slide, 'Quadrado y^2 ', shows a blue square with side length y and area $y \cdot y = y^2$. The bottom-right slide, 'Quadrado 1', shows a red square with side length 1 and area $1 \cdot 1 = 1$.

Fonte: elaborada pelos autores do presente documento

Figura 46 – Slides 28/06/2025

<p>Retângulo xy</p> 	<p>Retângulo xy</p>  <p>É um retângulo de base y e altura x. Sua área é $xy = xy$</p>
<p>Retângulo x</p> 	<p>Retângulo x</p>  <p>É um retângulo de base 1 e altura x. Sua área é $1x = x$</p>
<p>Retângulo y</p> 	<p>Retângulo y</p>  <p>É um retângulo de base 1 e altura y. Sua área é $1y = y$</p>
<p>$2x^2 + y^2 + 2xy$</p> 	<p>$x^2 - y$</p> 

Fonte: elaborada pelos autores do presente documento

Figura 47 – Slides 28/06/2025

Represente os polinômios utilizando o Algeplan			Represente os polinômios utilizando o Algeplan		
$2x^2 + y^2 + 2xy$	$x^2 - y$	$3y^2$	$2x^2 + y^2 + 2xy$	$x^2 - y$	$3y^2$
$(2x^2 - x + 4) + (-x^2 - x - 1)$	$x^2 + 2x + 1$	$(x+1).(x+1)$	$(2x^2 - x + 4) + (-x^2 - x - 1)$	$x^2 + 2x + 1$	$(x+1).(x+1)$
O QUADRADO DA SOMA			O QUADRADO DA SOMA		
$(x + y)^2$ \downarrow $(x + y)(x + y) = x^2 + y^2$			$(x + y)(x + y) = x^2 + xy$		
O QUADRADO DA SOMA			O QUADRADO DA SOMA		
$(x + y)(x + y) = x^2 + \underbrace{xy + xy}_{2xy} + y^2$			$(x + y)(x + y) = x^2 + \underbrace{xy + xy}_{2xy} + y^2$		
O QUADRADO DA SOMA			O QUADRADO DA SOMA		
$(x + y)(x + y) = x^2 + 2xy + y^2$			$(x + y).(x + y)$		

Fonte: elaborada pelos autores do presente documento

Figura 48 – Slides 28/06/2025

The figure consists of six slides arranged in a 3x2 grid, each titled "O QUADRADO DA DIFERENÇA".

- Slide 1 (top-left):** Shows the expansion of $(x-y)^2$ as $(x-y)(x-y) = x^2 - xy$. A curved arrow indicates the multiplication of x by x .
- Slide 2 (top-right):** Shows the expansion of $(x-y)(x-y) = x^2 - xy - xy + y^2$. A bracket under the two $-xy$ terms indicates they combine to $-2xy$.
- Slide 3 (middle-left):** Shows the expansion of $(x-y)(x-y) = x^2 - xy - xy + y^2$. A bracket under the two $-xy$ terms indicates they combine to $-2xy$.
- Slide 4 (middle-right):** Shows an area model for $x^2 - 2xy + y^2$ on the left, composed of a large yellow square, two black rectangles, and a small blue square. On the right, it shows the factored form $(x-y)(x-y)$.
- Slide 5 (bottom-left):** Shows the area model for $x^2 - 2xy + y^2$ on the left and the factored form $(x-y)(x-y)$ on the right, illustrating how the area is rearranged.
- Slide 6 (bottom-right):** Shows the area model for $x^2 - 2xy + y^2$ on the left and the factored form $(x-y)(x-y)$ on the right, with labels $x-y$ indicating the dimensions of the factored rectangles.

Fonte: elaborada pelos autores do presente documento

1.9 Encontro 9 – 05/07/2025

1.9.1 Plano de Aula

Público-alvo: Alunos do Ensino Médio e ingressantes do Ensino Superior.

Professores: Letícia Gabryela Cordeiro Lang, Ana Cecília dos Santos Maciel e Felipe Cesar Muller Rio Branco.

Objetivo geral:

- Compreender o conceito de função do primeiro grau;
- Identificar uma função de primeiro grau em um gráfico;
- Resolução de problema envolvendo função do primeiro grau;

Objetivos específicos:

- Reconhecer os elementos de funções do primeiro grau (termos, coeficiente angular e linear, variáveis e constantes);

- Compreender o conceito de funções do primeiro grau e sua estrutura;
- Resolver funções do primeiro grau com situações problemas;

Conteúdos: Função do primeiro grau;

Tempo de execução:

1 encontro com duração de 4 horas aula.

Recursos didáticos:

Quadro, giz, proveta, água, bolinhas de gude de mesmo tamanho, papel quadriculado,

Parte 1 (Duração: 10 minutos) – Preparação da sala

No primeiro momento, os professores irão receber os alunos com palavras de boas-vindas e, em seguida, entregarão as folhas de exercícios.

Parte 2 (Duração: 30 minutos) – Apresentação de conceitos importantes sobre o plano cartesiano

Par: Chama-se par todo conjunto formado por dois elementos.

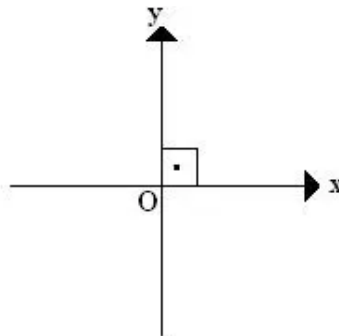
Par ordenado: Conjunto formado por dois elementos escrito em uma determinada ordem.

Exemplo: (3;4), onde 3 está localizado em relação à x e 4 está em relação à y.

Plano cartesiano: Consideremos dois eixos x e y perpendiculares entre si na origem, estes determinam o plano cartesiano. Nessas condições, definimos:

- abscissa:** eixo x (ou Ox), definido na horizontal.
- ordenada:** eixo y (ou Oy), definido na vertical.
- Sistema de eixos ortogonais: é construído por dois eixos perpendiculares, Ox e Oy , que tem a mesma origem O :

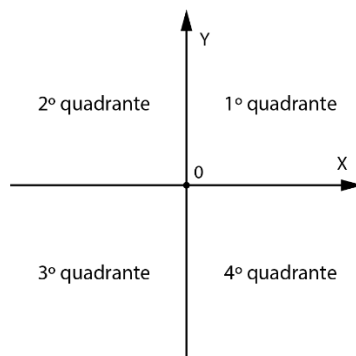
Figura 49 – Eixos ortogonais com origem



Fonte: brasilecola.uol.com.br

- d) Os eixos ortogonais dividem o plano cartesiano em quatro regiões chamadas quadrantes:

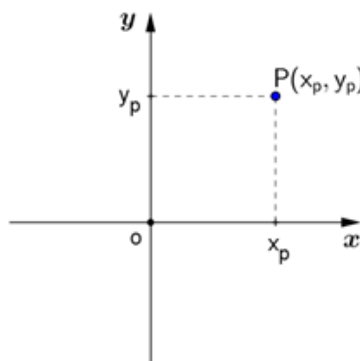
Figura 50 – Eixos ortogonais com quadrantes



Fonte: matematicasimplificada.com

Usamos esse sistema para localizar pontos no plano. Dando um ponto P desse plano, dizemos que os números a e b são as coordenadas cartesianas do ponto P, em que a é a abscissa e b é a ordenada:

Figura 51 – Eixos ortogonais com ponto P qualquer



Fonte: matematicasimplificada.com

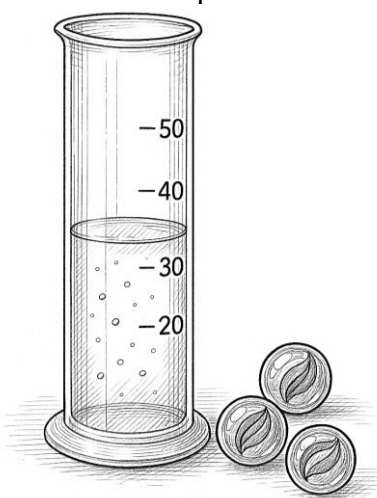
- e) Gráfico (reta): a representação visual da função afim é sempre uma linha reta.
- f) Uma função afim é crescente quando o coeficiente angular é positivo ($a > 0$). Nas funções crescentes, quando aumentamos os valores de x , os valores correspondentes de y também aumentam.

- g) Uma função afim é decrescente quando o coeficiente a é negativo ($a < 0$). Nas funções decrescentes, quando aumentamos os valores de x , os valores correspondentes de y diminuem.

Parte 3 (Duração: 60 minutos) – Dinâmica com a proveta

Cada grupo receberá uma (ou duas, conforme disponibilidade) proveta. Pediremos que encham a proveta com água até o nível de 60 mL. Em seguida, entregaremos algumas bolinhas de gude para cada grupo.

Figura 52 – Materiais da dinâmica: proveta e bolinhas de gude



Fonte: Imagem gerada por Inteligência Artificial

Na folha de atividades haverá uma tabela com duas colunas: uma para registrar a quantidade de bolinhas colocadas na proveta e outra para anotar o volume de água (em mL) após cada inserção.

Os alunos deverão colocar as bolinhas de gude uma a uma dentro da proveta e, a cada nova bolinha, anotar na tabela o volume de água resultante. O procedimento continuará até acabarem as bolinhas ou o momento em que não houver mais espaço na proveta.

Tabela 9 – Tabela da relação das bolinhas com mL

Quantidade de bolinhas (x)	Volume de água em mL (y)

Fonte: elaborada pelos autores do presente documento

Após, os alunos responderão às seguintes questões disponíveis na folha de atividades:

- a) À medida que acrescentamos bolinhas, o que acontece com o volume de água na proveta?
- b) Que volume de água teremos se colocarmos somente 1 bolinha na proveta? E se colocarmos 9 bolinhas?

Os professores pedirão para que os alunos desenhem um plano cartesiano e marquem nele os pontos obtidos na atividade com a proveta.

Em seguida, irão introduzir os conceitos de função, usando esse experimento como base:

Função: Dados dois pares ordenados A e B , uma relação f de A em B recebe o nome de função de A em B se, para todo $x \in A$ existem um só $y \in B$ tal que $(x, y) \in f$.

Variável independente: é uma variável que representa uma quantidade que está a ser manipulada numa experiência.

Variável dependente: representa uma quantidade cujo valor depende da forma como a variável independente é manipulada.

Domínio: conjunto de todos os primeiros elementos dos pares ordenados; no nosso caso, corresponde à quantidade de bolinhas de gude.

Imagem: conjunto dos segundos elementos dos pares ordenados, ou seja, os valores que o domínio atinge. Neste experimento, a imagem corresponde ao volume de água na proveta.

Agora, os alunos deverão responder às questões propostas na folha de atividades, relacionando os conceitos aprendidos com os resultados do experimento.

- a) Qual seria a variável dependente e a independente?
- b) Qual seria o conjunto domínio e o conjunto imagem?
- c) É possível escrever uma lei de formação para esta função?
- d) Quantas bolinhas são necessárias para que a água atinja 185 mL?
- e) Que altura seria atingida se colocássemos 25 bolinhas?

Pode se observar que o volume de água na proveta varia de acordo com a quantidade de bolinhas colocadas. As bolinhas podem ser adicionadas em quantidades diferentes, mas, para cada quantidade de bolinhas, existe um volume de água correspondente.

Também é notável que, para toda quantidade de bolinhas, há um único volume de água associado. Isso significa que cada valor de x (quantidade de bolinhas) determina exatamente um valor de y (volume de água na proveta).

Dessa forma, é possível afirmar que o volume y depende da quantidade x de bolinhas. A relação entre essas duas variáveis pode ser expressa pela função $y = 3x + 60$, que representa a lei de formação dessa função.

INTERVALO: 09h40min – 10h (20 minutos)

Parte 4 (Duração: 20 minutos) – Introdução a função

Para introduzir a noção de função, com o auxílio de *slides*, os professores irão apresentar os aspectos da relação de grandezas e variáveis, em geral, será mostrado que o conceito de função, é muito utilizado na matemática, em outros ramos da ciência e principalmente no dia a dia das pessoas.

Esse conceito sofreu no decorrer da história grande evolução. Diversos matemáticos (Gottfried Wilhelm Leibniz, Isaac Newton, Leonhard Euler, Joseph Fourier, entre outros) contribuíram significativamente para atualmente a função estar diretamente relacionada à Teoria dos Conjuntos desenvolvida a partir do século XIX.

Os professores também darão grande enfoque em situações do cotidiano em que as funções estão presentes, como:

- O valor da fatura de telefone é calculado em função do consumo no mês;
- A comissão de um vendedor é dada em função do quanto ele vende em determinado período;
- O tempo de uma viagem está em função da velocidade praticada no trajeto.

Representação gráfica de uma função: uma função de primeiro grau pode ser representada em um plano cartesiano representado por um par ordenado na forma (x,y)

Parte 5 (Duração: 15 minutos) – Situação-Problema

Prosseguindo será apresentada a seguinte situação problema: Carlos e sua família vão sair de férias e para isso decidiram alugar um quarto em uma pousada na praia da Lagoinha, no Ceará. O aluguel corresponde a uma parte fixa de R\$45,00, referente à taxa de limpeza, mais R\$190,00 por dia. Para calcular o valor do aluguel, podemos escrever uma fórmula. Para isso, chamamos de $y = f(x)$ o valor do aluguel e de x o número de dias da hospedagem. $f(x) = 190x + 45$ Dessa maneira, $f(x) = 190x + 45$ é a lei de formação da função que expressa

o valor do aluguel de acordo com x de dias. Essa função é denominada de função afim (função do primeiro grau).

Os professores solicitarão que os alunos calculem: Se considerar $x = 7$ (7 diárias), podemos, por meio da função, calcular o valor do aluguel, $f(7) = 190 \cdot 7 + 45 \rightarrow f(7) = 1330 + 45 \rightarrow f(7) = 1375$. Portanto, o valor do aluguel para 7 dias de hospedagem é R\$1375,00.

Parte 6 (Duração: 20 minutos) – Apresentação de conceitos

Para apresentação dos termos e conceitos serão utilizados *slides* para auxiliar na formalização. Chamamos de função do primeiro grau (afim) toda função do tipo $f(x) = ax + b$ em que: $a \rightarrow$ é o coeficiente real de x , com $a \neq 0$ e $b \rightarrow$ é um coeficiente real, também chamado termo independente. Aqui outros exemplos de função de primeiro grau (afim):

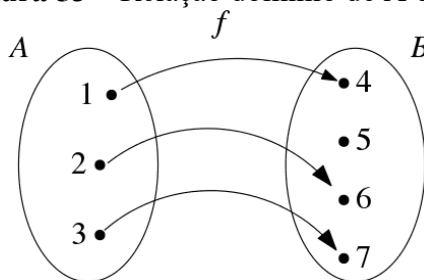
$$g(x) = -x + 9 \rightarrow a = -1 \text{ e } b = 9$$

$$h(x) = 7x \rightarrow a = 7 \text{ e } b = 0$$

Dado a lei de formação: $f(x) = ax + b$ temos:

- Definição: dado dois conjuntos não vazios, A e B , uma função de A em B é uma regra que indica como associar cada elemento $x \in A$ a um único elemento $y \in B$.
- Notação: $f: A \rightarrow B$ ou $A \xrightarrow{f} B$ (lê-se: f é uma função de A em B)
- Domínio: dada uma função f de A em B , o conjunto A chama-se domínio da função (D) e o conjunto B , contradomínio (CD) da função.

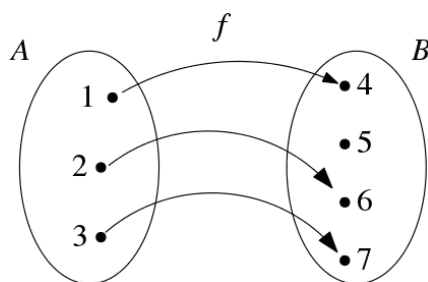
Figura 53 – Relação domínio de A em B



Fonte: descomplica.com.br

- Imagem: para cada $x \in A$, o elemento $y \in B$ chama-se imagem de x pela função f ou o valor assumido pela função f para $x \in A$, e o representamos por $f(x)$. Assim, $y = f(x)$.

Figura 54 – Relação domínio de A em B



Fonte: descomplica.com.br

$$Im(f) = \{4,6,7\}$$

- Variável independente (x): valor da entrada, no gráfico é representado pelo eixo horizontal (abscissa);
- Variável dependente (y): valor de saída, no gráfico é representado pelo eixo vertical (ordenadas);
- Coeficiente angular: é o valor real que multiplica a variável independente (x), determina se a reta é crescente ou decrescente, também conhecido como inclinação ou taxa de variação ou tangente do ângulo formado entre o eixo x e a reta da função;
- Coeficiente linear (b): também conhecido como coeficiente de ajuste, é o termo que não multiplica a variável independente, corresponde ao ponto da reta em que essa cruza o eixo y (ordenadas);
- Raiz da função ou zero da função: é o valor que cruza o eixo das abscissas quando igualamos a lei de formação igual a 0, ou seja, $f(x) = ax + b \rightarrow 0 = ax + b \rightarrow x = \frac{-b}{a}$;

Parte 7 (Duração: 30 minutos) – Exercícios

Continuando a aula será solicitado que preencham as atividades da folha e que resolvam os exercícios propostos a partir das atividades extras.

Parte 8 (Duração: 10 minutos) – Correção dos exercícios

Os professores solicitarão que os alunos corrijam as atividades no quadro para compartilharem as resoluções.

Parte 9 (Duração: 5 minutos) - Despedida

Em sequência, os professores realizarão um sorteio para decidir a separação dos alimentos para a confraternização do último dia. Posteriormente Agradecerão a presença de

todos, entregarão um doce como forma de agradecimento e incentivo, solicitarão ajuda para organizar a sala novamente e reforçarão que o grupo do Whatsapp foi criado para compartilharem as resoluções e os estudantes tirarem suas dúvidas.]

Avaliação

Os alunos serão avaliados a partir da participação durante as atividades e a demonstração de compreensão referente ao conteúdo pela observação dos professores. Esta observação individual, torna possível visualizar e auxiliar cada aluno em suas dificuldades específicas, de forma que a aprendizagem ocorra num âmbito qualitativo.

1.9.2 Relatório

Iniciamos os preparativos da aula com a organização da sala, dispondo as carteiras, como habitualmente fazíamos, em grupos de seis alunos. O encontro contou com a presença de 22 estudantes.

Para partimos com as temáticas a serem trabalhadas, questionamos os alunos presentes sobre o que eles entendiam ou lembravam a respeito plano cartesiano; obtendo então respostas como: retas perpendiculares, números, conjuntos dos (reais, naturais, inteiros), coordenadas. A partir disso, considerando essas memórias, avançamos explorando a ideia de ponto no plano cartesiano, relacionando os eixos de coordenadas x e y . Para fixação de conceitos, solicitamos que encontrassem um ponto no plano cartesiano – o que foi muito intuitivo e não houve dificuldade na realização da primeira atividade da folha.

Prosseguimos com a atividade preparada a qual tinha como o objetivo em introduzir o conceito de função de primeiro grau (Função Afim). O experimento constituía-se em adicionar bolinhas de gude numa proveta que já tinha 60mL de água, cada bolinha acrescentada aumentaria o volume do nível de água da proveta. Começando com 0 bolinhas, havia 60mL de água; então, quando os alunos foram adicionando as bolinhas, o nível da água foi aumentando e assim foram anotando os dados obtidos até utilizarem nove bolinhas de gude.

Após o término do experimento para obtenção de dados, solicitamos para que respondessem as questões da atividade dois da folha. Houve dificuldade em relacionar a quantidade de bolinhas de gude com o nível da água contida na proveta. Após alguns momentos, inclusive, pelas intervenções dos professores, ficou mais claro a relação com o conceito de função. Então questionamos os alunos, sobre se quiséssemos colocar mais bolinhas, por exemplo: 100 bolinhas? Não caberia na proveta, logo teríamos que calcular de outra maneira. Então para relacionar o experimento com a ideia de Função Afim, partimos para os *slides* preparados para a exploração dos conceitos fundamentais de função.

Apresentando a forma geral da função de primeiro grau: $f(x) = ax + b \leftrightarrow y = ax + b$ e para deixar mais claro o nome utilizado (primeiro grau) resgatamos da última aula de polinômios a ideia de que todo número está elevado a 1, ou seja, x^1 . Este comentário foi necessário para identificar a função do primeiro grau e diferenciá-la de uma função de segundo grau x^2 , o que foi muito bem recebido pelos alunos pois a ideia era intuitiva. Expondo os coeficientes angular, linear, as variáveis independente e dependente, o zero da

função ou raiz da função (foi muito importante para esboçar o gráfico da função de primeiro grau).

Para prosseguir os alunos praticaram com os exercícios preparados (1). Os quais tinham como objetivo escrever a forma geral da função de primeiro grau da seguinte forma: $f(x) = ax + b$ ou $y = ax + b$ não houve dificuldades visto que tinham que apenas reorganizar as variáveis presentes na equação.

Após o intervalo utilizamos a correção no quadro realizada pelos alunos como forma de avaliação, ou seja, um aluno resolvia no quadro a equação para que as dúvidas fossem esclarecidas. Então continuamos com atividades para maior fixação, durante este tempo de prática os alunos demonstraram algumas dificuldades em relacionar o x e y no plano cartesiano. Ao encontrarem o zero da função (intercepta o eixo Ox) e o valor de b (intercepta o eixo Oy) para então esboçarem o gráfico da função, utilizando os dois pontos obtidos.

1.9.3 Materiais utilizados

Atividades 05/07/2025

Atividade 1 - Localize os pares ordenados no plano cartesiano:

- a) (0,4) b) (1,-4) c) (-1,3) d) (-2,-4) e) (5,5)

Atividade 2 - Encha a proveta até o nível de 60 ml de água. Em seguida, adicione as bolinhas de gude uma de cada vez, observando e anotando o volume total de água na proveta a cada nova bolinha colocada. Registre os dados na tabela, indicando a quantidade de bolinhas e o respectivo volume.

Quantidade de bolinhas (x)	Volume de água em mL (y)

- a) À medida que acrescentamos bolinhas, o que acontece com o volume de água na proveta?
- b) Que volume de água teremos se colocarmos somente 1 bolinha na proveta? E se colocarmos 9 bolinhas?
- c) Qual seria a variável dependente e a independente?
- d) Qual seria o conjunto domínio e o conjunto imagem?
- e) É possível escrever uma lei de formação para esta função?
- f) Quantas bolinhas são necessárias para que a água atinja 185 mL?
- g) Que altura seria atingida se colocássemos 25 bolinhas?

Atividade 3 - Questões sobre os conceitos apresentados

- b) Qual a estrutura da lei de formação de uma função afim?

- c) Qual é a variável dependente?
- d) Qual a variável independente?
- e) O que significa zero da função ou raiz da função?
- f) Como se comporta o coeficiente angular? E a representação visual no plano cartesiano?

Atividades Extras

1. Escreva as funções na forma $y = ax + b$ ($f(x) = ax + b$) e determine os valores dos coeficientes **a** e **b** de cada uma delas:

a) $y + 2x = 4 - x$

d) $3y + x = 3x + 2y + 7$

b) $2y - 3x = y + x + 1$

e) $4y - 3x + 2 = -y - 4x + 7$

c) $3y + 1 = y - x$

f) $-2y - x + 3 = -4y - 6x - 1$

2. Quais das funções abaixo de \mathbb{R} em \mathbb{R} são funções afim?

(a) $f(x) = 7x - 2$

(c) $y = 1 - \frac{3}{x}$

(e) $y = -\frac{x}{7}$

(b) $y = 2 - 2x$

(d) $y = x^2 + x$

(f) $y = 6 - \frac{x}{6}$

3. Construir o gráfico das funções:

a) $y = 2x - 3$

b) $y = -x + 2$

c) $y = 4 - 2x$

4. Em cada uma das funções afim, dizer qual é o coeficiente angular e qual é o coeficiente linear:



a) $y = 4x - 5$

b) $y = 2 - x$

c) $y = -3x$

d) $y = \frac{4}{5} - \frac{x}{2}$

5. Encontre o zero das seguintes funções e diga se a função é crescente ou decrescente:

a) $f(x) = -3x + 4$

b) $f(x) = 2 - 3x$

c) $f(x) = 2x - 8$

d) $f(x) = \frac{x}{6} - 1$

e) $f(x) = 2x - 5$

f) $f(x) = -x + 2$

g) $y = \frac{x}{3} + 1$

h) $y = 2x$

i) $f(x) = -2x + 5$

j) $y = 4 - 3x$

k) $f(x) = 3x - 1$

Atividade Extra

1. Considere a função $f: A \rightarrow B$, tal que $f = 2x + 1$, e $A = \{1,2,3,4,6\}$. Qual das alternativas a seguir representa o conjunto imagem I dessa função?
 - (a) $I = \{2,4,6,8,12\}$
 - (b) $I = \{3,5,7,9,13\}$
 - (c) $I = \{3,4,6,9,11\}$
 - (d) $I = \{2,5,7,9,13\}$
 - (e) $I = \{2,3,4,9,11\}$

2. Seja os conjuntos $A = \{4,6,8,10\}$ e $B = \{3,4,5,6\}$. Considerando cada elemento do conjunto A com x, qual das relações a seguir pode representar uma função $f: A \rightarrow B$?
 - (a) $f(x) = \frac{x}{2} + 2$
 - (b) $f(x) = 2x - 1$
 - (c) $f(x) = \frac{x}{2} - 1$
 - (d) $f(x) = 2x + 1$
 - (e) $f(x) = \frac{x}{2} + 1$

3. Em uma padaria, o preço de cada pão é R\$0,66. Fabiana quer comprar 5 pães, mas acha que essa quantidade pode não ser suficiente, e precisa decidir se comprará mais 2 ou 3 pães. Chamando a quantidade de pães de p e o preço em reais a ser pago de R, qual é a função que pode ser usada para calcular o preço total a ser pago pelos pães por Fabiana.
 - (a) $R(p) = 0,66 \cdot p$
 - (b) $R(p) = p + 0,66$
 - (c) $R(p) = 0,66 \cdot p + 5$
 - (d) $R(p) = 6,6 \cdot p$
 - (e) $R(p) = \frac{p}{0,66}$

4. Uma banheira contém 30 litros de água em seu interior. Em determinado momento, foi aberta uma torneira com vazão constante de 20 litros de água por minuto. Observe na tabela a seguir a relação entre a medida de volume de água despejada pela torneira e o intervalo de tempo gasto.

Enchimento de água na banheira	
Medida de intervalo de tempo (em min)	Medida de volume de água (em L)
0	30
1	50
2	70
3	90
4	110
5	130

Considerando esses dados, qual a função que associa o intervalo de tempo t ao volume V de água despejada pela torneira?

- (a) $V(t) = 20t$
 - (b) $V(t) = 20t + 30$
 - (c) $V(t) = 30t - 20$
 - (d) $V(t) = 30t$
 - (e) $V(t) = 30t + 20$
5. Para pintar uma parede, um pintor cobra a quantia de R\$ 5,50 por metro quadrado mais uma taxa fixa de R\$ 45,00. Qual é a função que representa o valor (V) cobrado por esse pintor em função de (x) metros quadrados pintados?
- (a) $V(x) = 5,5x$
 - (b) $V(x) = 5,5x + 45$

(c) $V(x) = 45x$

(d) $V(x) = 45x + 5,5$

(e) $V(x) = 50x$

6. Patrícia é uma revendedora de perfumes. Ela percebeu que seu lucro mensal (L), em reais, varia em função do número (n) de perfumes vendidos, conforme representado a seguir: $L(n) = 10n - 2.100$

Para obter um lucro mensal de 1.900 reais, Patrícia deverá vender, ao mês, um total de perfumes igual a:

(a) 180

(b) 190

(c) 200

(d) 210

(e) 400

6. (Enem) Uma empresa tem diversos funcionários. Um deles é o gerente, que recebe R\$1.000,00 por semana. Os outros funcionários são diaristas. Cada um deles trabalha 2 dias por semana, recebendo R\$80,00 por dia trabalhado. Chamando de X a quantidade total de funcionários da empresa, a quantia Y , em reais, que esta empresa gasta semanalmente para pagar seus funcionários é expressa por:

(a) $Y = 80X + 920$

(b) $Y = 80X + 1000$

(c) $Y = 80X + 1080$

(d) $Y = 160X + 840$

(e) $Y = 160X + 1000$

7. Em uma corrida de táxi, é cobrado um valor inicial fixo, chamado de bandeirada, mais uma quantia proporcional aos quilômetros percorridos. Se por uma corrida de 8 km paga-se R\$ 28,50 e por uma corrida de 5 km paga-se R\$ 19,50, então o valor da bandeirada é:

(a) R\$ 7,50

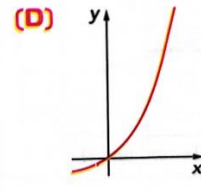
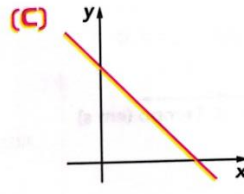
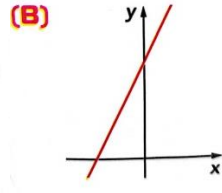
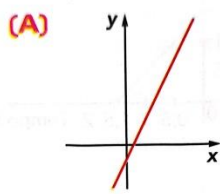
(b) R\$ 6,50

(c) R\$ 5,50

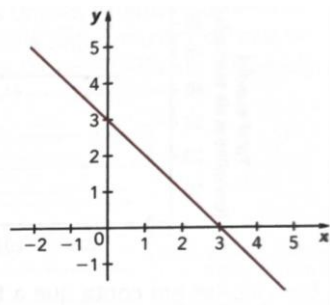
(d) R\$ 4,50

8. Qual dos gráficos a seguir melhor representa o conjunto de pontos (x,y) da tabela?

x	-2	-1	0	1	2	3	4
y	0	2	4	6	8	10	12



9. Qual é a tabela cujo conjunto de pontos (x, y) melhor representa o gráfico a seguir?



(a)

x	-2	-1	0	1	2	3	4
y	3	2	1	0	-1	-2	-3

(b)

x	-2	-1	0	1	2	3	4
y	-2	-1	0	0	2	3	4

(c)

x	-2	-1	0	1	2	3	4
y	-4	-1	0	1	4	9	16

(d)

x	-2	-1	0	1	2	3	4
y	5	4	3	2	1	0	-1

(e)

x	-2	-1	0	1	2	3	4
y	3	3	3	3	3	3	3

SLIDES

Figura 55 – Slides 05/07/2025

Desvendando a Função Afim

Isaac Newton, Leonhard Euler, Joseph Fourier

Agenda da Apresentação

- O que é Função Afim?
- Coeficientes Angular e Linear
- Gráfico da Função Afim
- Aplicações Práticas
- Exemplos e Exercícios

O que é Função Afim?

Uma função afim é uma relação matemática onde a variável independente (x) é multiplicada por uma constante (a) e somada a outra constante (b), resultando em $f(x) = ax + b$. O gráfico de uma função afim é sempre uma reta. Por exemplo, calcular o preço de uma corrida de táxi que tem uma taxa fixa e um valor por quilômetro rodado.

Função Afim: Definição

- Forma geral: $f(x) = ax + b$, com a e b reais.
- a é o coeficiente angular (inclinação) da reta.
- b é o coeficiente linear (onde a reta corta y).

Variável Independente (x)

- É o valor de entrada da função, o X que usamos.
- Determina o valor de saída Y , dependendo da regra da função.
- Pode ser qualquer número dentro do domínio da função afim.

Variável Dependente ($f(x)$)

- $f(x)$ é o resultado da função, influenciado pela variável independente.
- Exemplo: custo total depende do número de itens comprados ($f(x)$).
- Representa o valor de saída, essencial para entender a função.

Gráfico da Função Afim

- Reta: Representação visual da função afim no plano cartesiano.
- Inclinação: Coeficiente angular ' a ' define a inclinação da reta.
- Interação: Ponto onde a reta corta o eixo y (coeficiente ' b ').

Fonte: elaborada pelos autores do presente documento

1.10 Encontro 10 – 12/07/2025

1.10.1 Plano de Aula

Público-alvo: Alunos do Ensino Médio e ingressantes do Ensino Superior.

Professores: Letícia Gabryela Cordeiro Lang, Ana Cecília dos Santos Maciel e Felipe Cesar Muller Rio Branco.

Objetivo geral:

- Fixar o aprendizado da lei de formação de triângulos e equações do triângulo;
- Estimular a interação entre alunos e professores;
- Avaliar o progresso individual e dos grupos.

Objetivos específicos:

- Criar um ambiente de aprendizado mais engajador e divertido.
- Promover o desenvolvimento de habilidades cognitivas, socioemocionais e motoras.

Conteúdos: Triângulos e Equação do Primeiro Grau

Tempo de execução:

1 encontro com duração de 4 horas aula.

Recursos didáticos:

Cartões com números e ângulos, bolinhas, cesto, giz, quadro, equações para sorteio da dinâmica.

Dinâmica do triângulo:

Cada grupo receberá duas pilhas de cartões: uma pilha contendo cartões com medidas de lados (por exemplo, 3 cm, 4 cm, 5 cm, 7 cm, 10 cm) e outra com cartões de medidas de ângulos (por exemplo, 30°, 45°, 60°, 90°, 120°).

Em cada rodada, o grupo deverá sortear três cartões de lados e três cartões de ângulos. A tarefa é analisar, rapidamente, se é possível formar um triângulo com aqueles três lados, aplicando a condição de existência do triângulo, que diz que a soma de dois lados deve ser maior que o terceiro lado. Em seguida, o grupo também verifica se é possível formar um triângulo com os três ângulos, lembrando que a soma dos ângulos internos deve ser igual a 180° e que cada ângulo deve ser maior que zero.

Assim que decidirem, os integrantes devem dizer em voz alta "SIM" ou "NÃO" para cada conjunto. Caso a resposta seja "NÃO", o grupo deve explicar o motivo pelo qual não é possível formar o triângulo, justificando com base na soma dos lados ou dos ângulos. Se a resposta e a explicação estiverem corretas, o grupo devolve os cartões usados, sorteia novos cartões e continua. Se errar, precisa corrigir a justificativa antes de seguir.

Dinâmica das equações de primeiro grau:

Cada grupo formará uma fila, e os integrantes irão participar um por vez. O primeiro aluno da fila começa tentando acertar uma bolinha de plástico dentro de um balde, que estará posicionado a uma distância definida.

Quando o aluno acerta a bolinha no balde, ele pega um cartão com uma equação do primeiro grau (por exemplo: $x + 5 = 12$; $2x - 3 = 7$) e vai para o lado resolver a equação. Enquanto ele está resolvendo, o segundo aluno da fila já pode começar a tentar acertar a bolinha.

Após resolver a equação, o aluno entrega a resposta ao professor ou monitor para conferência. Mesmo que ele ainda esteja resolvendo ou corrigindo a equação, os outros colegas do grupo já podem ir para frente, jogar a bolinha, acertar e pegar as próximas equações, continuando o fluxo normalmente.

Caso alguém erre a solução da equação, precisa corrigi-la antes de contabilizar o ponto, mas isso não impede que os demais membros avancem.

Despedida:

Em sequência, os professores realizarão uma fala para dispensar os alunos e agradecer a todos pela presença durante o Promat.

Avaliação

Os alunos serão avaliados a partir da participação durante as atividades e a demonstração de compreensão referente ao conteúdo pela observação dos professores. Esta observação individual, torna possível visualizar e auxiliar cada aluno em suas dificuldades específicas, de forma que a aprendizagem ocorra num âmbito qualitativo.

1.10.2 Relatório

Preparamos a aula, iniciando com a organização da sala, dispondo as carteiras para as dinâmicas que seriam realizadas. Esse encontro contou com a presença de 23 estudantes.

Nessa data, pudemos ter contato com os estudantes de cada turma, conduzidas pelos nossos colegas, o que nos impressionou, pois, a ideia de dividi-los em grupos aleatórios funcionou para alguns grupos e, para outros, não. Parece que esse fato levou a exclusão de alguns alunos. Felizmente havia uma quantidade considerável de alunos da nossa turma nos grupos ganhadores, o que pode evidenciar o bom desempenho dos nossos alunos durante as aulas.

Este contato com alunos das outras turmas, nos fez perceber que as aulas realmente aconteceram como mencionado pelos nossos colegas estagiários, alguns alunos não sabiam absolutamente nada, e outros conseguiam encontrar o propósito da dinâmica. De qualquer forma, infelizmente, mesmo estando ali sem nenhuma obrigação, os alunos apresentaram muitas dificuldades e pouca motivação para vencer obstáculos que não são fáceis e exigem bastante empenho.

Destes fatos observados, podemos concluir que o aprendizado não depende apenas do professor, parece ser como uma via de mão dupla, professores e alunos devem ser aproximados e andarem lado a lado, todos empenhados nesse processo tão complexo, como vimos durante as dez aulas ministradas.

1.10.3 Materiais utilizados

Equações para a dinâmica

- 1) $2x + 7 = -17$
- 2) $7x - 45 = 2x - 45$
- 3) $2x + 7 = -27$
- 4) $2x - 16 = 50$
- 5) $2x + 7 = 36 + 3$
- 6) $\frac{x}{12} + 1 = \frac{48}{12} + 1$
- 7) $3x + 24 = 186$
- 8) $3x + 8 = 4x - 7$
- 9) $x - 5 = 31$
- 10) $3x - 4 = 34 + x$
- 11) $\frac{x}{7} = 105 - 2x$
- 12) $2x = +x - 18$
- 13) $4x - 5 = 75$
- 14) $5x - 5 = 60$
- 15) $3x + 2 = 95$
- 16) $\frac{x}{5} = 10$
- 17) $4x - 68 = 0$
- 18) $\frac{x}{2} + 2x = 95$
- 19) $5x + 25 = 150$
- 20) $5x + 75 = 180$
- 21) $2x - 3x = 3x - 4$
- 22) $-3 = x + 1$
- 23) $\frac{x}{22} + 2 = 4$
- 24) $5x + 17 = 27 + 3x$
- 25) $60 + 36x = 30x$
- 26) $2x - 110 = -3x$
- 27) $3x + 5 = 2$
- 28) $6x = 2x + 28$
- 29) $x + 15 = 38$
- 30) $3x - 5 = 13$
- 31) $\frac{x}{3} + 26 = 39$
- 32) $5x - 1 = 8x + 5$
- 33) $2x + 6 = x + 18$
- 34) $x + 3 = 27$
- 35) $3x = -27$

36) $x - 9 = -1$

37) $\frac{x}{10} - 2 = 2$

38) $x - 1 = -8$

39) $\frac{x}{2} - 5 = 8$

40) $2x + 7 = -31$

41) $2x + 23 = 105$

42) $2x - 3 = 17$

43) $2x = 54$

44) $3x - 5 = 136$

45) $5 + 6x = 5x + 2$

46) $\frac{x}{26} = 2$

47) $4x - 8 = 3x + 3$

48) $\frac{x}{4} + 7 = 14$

49) $\frac{2x+10}{5} = x - 45$

50) $\frac{x}{3} - 14 = 0$

51) $2x = -3x + 15$

52) $4x + 10 = x - 8$

53) $x - 8 = 1$

54) $15 = x + 20$

55) $x + 0 = 43$

56) $5x - 3 = 2x + 9$

57) $x + 24 + x = 92$

58) $\frac{3x}{3} = \frac{90}{3}$

59) $3x = 135$

60) $2x - 37 = x$

61) $8x + 5 = 261$

62) $6x = 2x + 16$

63) $2x - 5 = x + 1$

64) $2x + 3 = x + 4$

65) $5x + 7 = 4x + 10$

66) $4x - 10 = 2x + 2$

67) $4x - 7 = 8x - 2$

68) $2x + 1 = 4x - 7$

69) $9x + 9 + 3x = 15$

70) $16x - 1 = 12x + 3$

71) $3x - 2 = 4x + 9$

72) $5x - 3 + x = 2x + 9$

73) $17x - 7x = x + 18$

74) $x + x - 4 = 17 - 2x + 1$

$$75) \quad x + 2x + 3 - 5x = 4x - 9$$

$$76) \quad 5x + 4 = 3x - 2x + 4$$

$$77) \quad 4x - 1 = 3(x - 1)$$

$$78) \quad 3(x - 2) = 2x - 4$$

$$79) \quad 2(x - 1) = 3x + 4$$

$$80) \quad 3(x - 1) - 7 = 15$$

$$81) \quad 7(x - 4) = 2x - 3$$

$$82) \quad 3(x - 2) = 4(3 - x)$$

$$83) \quad 3(3x - 1) = 2(3x + 2)$$

$$84) \quad 7(x - 2) = 5(x + 3)$$

$$85) \quad 3(2x - 1) = -2(x + 3)$$

$$86) \quad 5x - 3(x + 2) = 15$$

$$87) \quad 2x + 3x + 9 = 8(6 - x)$$

$$88) \quad 4(x + 10) - 2(x - 5) = 0$$

$$89) \quad 3(2x + 3) - 4(x - 1) = 3$$

$$90) \quad 2(3 - x) = 3(x - 4) + 15$$

$$91) \quad 3(5 - x) - 3(1 - 2x) = 42$$

$$92) \quad 3x - 7 = 2x + 5$$

$$93) \quad 7x + 8 = 4x - 10$$

$$94) \quad 4x - 15 = -2x + 3$$

$$95) \quad 2x - 4 - 8 = 4x$$

$$96) \quad 3x = x + 1 + 7$$

$$97) \quad 360 + 36x = 30x$$

$$98) \quad 2x + 5 - 5x = -1$$

$$99) \quad 5 + 6x = 5x + 2$$

$$100) \quad x + 2x - 1 - 3 = x$$

$$101) \quad -3x + 10 = 2x + 8 + 1$$

$$102) \quad 5x - 5 + x = 9 + x$$

$$103) \quad 7x - 4 - x = -2x + 8 - 3x$$

$$104) \quad 3x - 2x = 3x + 2$$

$$105) \quad 2 - 4x = 32 - 18x + 12$$

$$106) \quad 2x - 1 = -3 + x + 4$$

$$107) \quad 3x - 2 - 2x - 3 = 0$$

$$108) \quad 10 - 9x + 2x = 2 - 3x$$

$$109) \quad 4x - 4 - 5x = -6 + 90$$

$$110) \quad 2 - 3x = -2x + 12 - 3x$$

$$111) \quad 7x + 14 = 4x - 10$$

$$112) \quad x - 2x + 11 = 22$$

$$113) \quad 10x + 16 = 14x + 8$$

$$114) \quad x - 15 = 10 + 26$$



CONSIDERAÇÕES FINAIS

Durante os 10 encontros do Promat, pudemos realizar atividades diferentes do modelo de aula tradicional, o que exige maior tempo para preparação e execução. A qualidade das dinâmicas e dos conteúdos matemáticos foi maior devido à dedicação de um grupo de três professores. Cada aula foi uma experiência única que, além de fortalecer os laços entre alunos e professores, nos proporcionou um crescimento proveitoso para a vida acadêmica e vida profissional. Ao longo do Promat, também pudemos identificar ações a serem aprimoradas em nossa prática profissional, o que contribuirá para nosso desenvolvimento como futuros professores.

A análise do retorno dos alunos nos permitiu concluir que alcançamos nosso objetivo de contribuir significativamente para a formação de cada estudante, tanto no âmbito escolar quanto social, reforçando a importância da nossa ação como professores e da verdadeira arte de ensinar.

REFERÊNCIAS

ACERTA BRASIL, Matemática: Ensino médio em ação 3ª série-obra coletiva. São Paulo: Ática, 2024.

AIZIKOVITSH-UDI, Einav. The extent of mathematical creativity and aesthetics in solving problems among students attending the Mathematically Talented Youth Program. **Creative Education**, v. 5, p. 228-241, 2014. Acesso em: 28 jul. 2025.

Teorema de Pitágoras animação. YouTube Short, 24 fev. 2025. Disponível em: <https://www.youtube.com/shorts/BM2jLBsJAXQ> . Acesso em: 6 jun. 2025.

ARAUJO, Denise Alves.; SOARES, Eduardo Sarquis. Calculadoras e outras geringonças na escola. **Presença Pedagógica**. Belo Horizonte: set/out, 2002.

ARAUJO, Denise Alves.; SOARES, Eduardo Sarquis. **Jogo das Operações**: Material de apoio para o(a) Professor(a). 2002. Disponível em: https://www.ufrgs.br/mathematic/wp-content/uploads/2021/07/JOGO-DAS-OPERACOES_-Professor.pdf . Acesso em: 26 abr. 2025.

BARBOSA, João Lucas Marques. **Geometria Euclidiana Plana**. Rio de Janeiro: SBM, 1995. (Coleção do Professor de Matemática). Reimpressão: ago. 1997.
Bocô 7º Filho. **Proporção Áurea**. [YouTube], 2022. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=zbUqWuOi9SE>. Acesso em: 21 mai. 2025. Duração: 14min 12s.

BOFF, Daiane Scopel. **A Construção dos Números Reais na Escola Básica**. 2006. 254 f. Dissertação de Mestrado Profissionalizante. Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2006.

CHAVES, Adilson Silva; SABBA, Cláudia Georgia. **O uso da razão áurea no ensino da matemática**. 2013. Disponível em: https://docs.uninove.br/arte/ix_coloquio/PDF/adilson_chaves.pdf. Acesso em: 22 maio 2025.

CHAVES, Diego Romeira Cigaran. **A Matemática é uma arte**: uma proposta de ensino explorando ligações entre arte e matemática. Porto Alegre, 2008. Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Dissertação de mestrado
<<http://www.lume.ufrgs.br/bitstream/handle/10183/23721/000743298.pdf>>. Acesso: 03 dez. 2025.

DANTAS, Tiago. Área da coroa circular; **Brasil Escola**. Disponível em: <https://brasilestela.uol.com.br/matematica/area-coroa-circular.htm>. Acesso em: 12 jun. 2025.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática**: Contexto & Aplicações. 2. ed. São Paulo: Ática, 2013.

DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau, **Fundamentos de Matemática Elementar - Geometria Plana**, v. 9, 8 ed., São Paulo: Atual, 2005.



ELIAS, Ana Paula de Andrade Janz; ROCHA, Flavia Sucheck Mateus da; LOSS, Taniele. **Fundamentos de Matemática**. São Paulo: Contentus, 2020. *E-book*. Disponível em: <https://plataforma.bvirtual.com.br>. Acesso em: 17 jun. 2025.

ENGLISH, Lyn D.; LESH, Richard; FENNEWALD, Thomas. *Future directions and perspectives for problem solving research and curriculum development*. In: CONGRESSO INTERNACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 6-13 – ICME, 11, Monterrey, México, 2008. Conferência apresentada. Monterrey, México, 2008. (Não publicado).

ERVYNCK, Gontran. Mathematical creativity. In: TALL, D. (Ed.). **Advanced mathematical thinking**. Dordrecht: Kluwer Academic, 1991. p. 42-53. Acesso em 28 jul. 2025.

ESTEVES DE CASTRO, Vanessa. Ensino-Aprendizagem de Polinômios no 8º Ano do Ensino Fundamental em uma Escola Estadual de Belo Horizonte: Uma Proposta Com a Utilização do Algeplan. Sapiens - **Revista de Divulgação Científica**, v. 1, 2019. Disponível em: <https://revista.uemg.br/index.php/sps/article/view/3790> . Acesso em: 23 jun. 2025.

FERREIRA, Marcelo; DUTRA, Aline; CASTILHO, Vanessa Righi; ITACARAMBI, Ruth Ribas. Modelagem Matemática nos Cursos de EJA no Desenvolvimento do Número Irracional Pi e suas Aplicações do Cálculo de Área e Perímetro da Circunferência. Curitiba: **Anais do XI ENEM**, Curitiba, 2013. Acesso em: 12 jun. 2025.

FEY, Franciele; JALINEK, Karin Ritter. **Guia do Ensino Experimental da Matemática**. Santo Antônio da Patrulha: FURG, 2021. 47 f.

FIGUEIREDO, Sheila Mendes de; PEREIRA, Luiz Henrique Ferraz. **Expressões algébricas: uma sequência com auxílio de geometria plana e aritmética**. Universidade de Passo Fundo, 2019. (Produtos Educacionais do PPGECM).

FIORENTINI, Dario; LORENZATO, Sergio. **Investigação em Educação Matemática: percursos teóricos e metodológicos**. Campinas: Autores Associados, 2006.

GERADOR DE PALAVRAS CRUZADAS. Disponível em: <https://products.aspose.ai/words/pt/crosswordmaker/>. Acesso em: 6 jun. 2025.

GOVERNO DO PARANÁ. Programa inovador da rede estadual com situações reais prepara alunos para avaliações. Secretaria de Estado da Educação do Paraná, 2025. Disponível em: <https://www.educacao.pr.gov.br/Noticia/Programa-inovador-da-rede-estadual-com-situacoes-reais-prepara-alunos-para-avaliacoes>. Acesso em: 25 jul. 2025.
<https://mmpmateriaispedagogicos.com.br/produto/area-do-circulo/> Acesso em: 12 jun. 2025.

IEZZI, Gelson; MURAKAMI, Carlos. **Fundamentos de Matemática Elementar, 1: conjuntos, funções**. 9. ed. São Paulo: Atual, 2013.

IEZZI, Gelson et al. **Matemática: 1ª série, 2º grau**. São Paulo: Atual Editora, 1974.

IEZZI, Gelson. **Fundamentos de Matemática Elementar** Volume 6, COMPLEXOS, POLINÔMIOS, EQUAÇÕES. 7.ed. São Paulo: Atual, 2007.

IEZZI, Gelson; MURAKAMI, Carlos. **Fundamentos da Matemática Elementar, Volume 1, Funções**. 8. ed. São Paulo: Atual, 2004.

JUNIOR, Marcelo Martins Furtano da Silva; CIANI, Andréia Büttner. **Relações Métricas no Triângulo Retângulo**. Cascavel: PIBID, 2023. [No prelo]

MMP Materiais Pedagógicos para Matemática, KMG – Kit manipulando a geometria. Disponível em: <https://mmpmateriaispedagogicos.com.br/>

MORAES, Rogério. Relações métricas no triângulo retângulo. **Blog do Professor Rogério Moraes**, 2020. Disponível em: <https://profrogeriosmoraes.blogspot.com/2020/08/relacoes-metricas-no-triangulo.html>. Acesso em: 6 jun. 2025.

OLIVEIRA, Francisco Erilson Freire de; BRAZ, Erikson da Silva; PEREIRA, Paulo Henrique de Araujo; NOLETO, Jarles Oliveira Silva. Pitágoras e o seu teorema: algumas considerações acerca do ensino e demonstrações. **Research, Society and Development**, [S. l.], v. 11, n. 6, p. e32311629186, 2022. Disponível em: <https://rsdjournal.org/index.php/rsd/article/view/29186>. Acesso em: 5 jun. 2025.

ONUCHIC, Lourdes de La Rosa; ALLEVATO, Norma Suely Gomes. Pesquisa em resolução de problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas. **Boletim de Educação Matemática – BOLEMA**, Rio Claro, v. 25, n. 41, dez. 2011.

PEREIRA, Livia da Cás; FERREIRA, Marcio Violante. (2016). Sequência de Fibonacci: história, propriedades e relações com a razão áurea. **Disciplinarum Scientia | Naturais E Tecnológicas**, 9(1), 67–81. Recuperado de <https://periodicos.ufn.edu.br/index.php/disciplinarumNT/article/view/1236>

POLYA, George. **A arte de resolver problemas: um novo aspecto do método matemático**. Tradução de Heitor Lisboa de Araújo. 2. ed. Rio de Janeiro: Interciência, 1995.

POMMER, Wagner Marcelo. **A construção de significados dos números irracionais no ensino básico: uma proposta de abordagem envolvendo os eixos constituintes dos números reais**. 2012. Tese (Doutorado em Educação) - Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2012. doi:10.11606/T.48.2012.tde-23082012-092642. Acesso em: 28 jul. 2025.

PROENÇA, Marcelo Carlos de. **Resolução de Problemas: uma proposta de organização do ensino para a aprendizagem de conceitos matemáticos**. *Revista de Educação Matemática*, São Paulo, 2021, v. 18, p. 1-14.

PROJETO LABMATI: uma experiência com o uso do Algeplan para o ensino de álgebra dos anos finais do ensino fundamental. **Revista Cearense de Educação Matemática**, [S. l.], v. 3, n. 7, p. 1–15, 2024. DOI: 10.56938/rceem.v3i8.4208. Disponível em: <https://www.sbembrasil.org.br/periodicos/index.php/rceem/article/view/4208>. Acesso em: 23 jun. 2025.



RÊGO, Rogéria Gaudencio Do; RÊGO, Rômulo Marinho do; VIEIRA, Kleber Mendes. **Laboratório de ensino de geometria**. Campinas: Autores Associados, 2022. *E-book*. Disponível em: <https://plataforma.bvirtual.com.br>. Acesso em: 17 jun. 2025.

RESENDE, Luana Pimenta Muniz de. **Poliedros regulares e semirregulares**. 2023. 88 f. TCC (Graduação em Licenciatura em Matemática) – Faculdade de Matemática, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2023.

RODRIGUES, Fredy Coelho; GAZIRE, Eliane Scheid. Reflexões sobre uso de material didático manipulável no ensino de matemática: da ação experimental à reflexão. **Revemat**. Florianópolis, v. 07, n. 2, p. 187-196, 2012.

SILVA, Fernando da Rocha da. **Estudantes do 9º ano do ensino fundamental exploram situações com os números irracionais π e ϕ** . 2019. 205 f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática) - Instituto de Educação / Instituto Multidisciplinar de Nova Iguaçu, Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Seropédica, 2019.

SILVA, Fernando da Rocha da. **Estudantes do 9º ano do ensino fundamental exploram situações com os números irracionais π e ϕ** . 2019. 205 f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática) - Instituto de Educação. Instituto Multidisciplinar de Nova Iguaçu, Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Seropédica, 2019.

SILVER, Edward A. **Fostering creativity through instruction rich in mathematical problem solving and problem posing**. *ZDM — The International Journal on Mathematics Education*, v. 29, n. 3, p. 75-80, 1997. Acesso em: 28 jul. 2025.

SMITCH, Elias. **Pato Donald e a sequência de Fibonacci (Regra de ouro)**. [YouTube], 2016. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=nv7OAMUuUW0>. Acesso em: 21 de maio, 2025. Duração: 6 min 33s.

SOMATEMÁTICA. Proporções. *Virtuous Tecnologia da Informação*, 1998–2025. Disponível em: <https://www.somatematica.com.br/fundam/propor6.php>. Acesso em: 22 maio 2025.

SOUZA, Joamir Roberto de; PATARO, Patrícia Rosana Moreno. **Vontade de Saber Matemática**. São Paulo: FTD, 2012.

SOUZA, Alisson Pereira de; SILVA, Máiri Poeta Cortina Castilho da; LAVAGNOLI, Michelli Neves; CAMPOS, Vitor Augusto Resende. Relatório da disciplina de Metodologia e Prática de Ensino de Matemática: **Estágio Supervisionado I (PROMAT)**. Universidade Estadual do Oeste do Paraná. Cascavel, 2023.

TODA MATÉRIA. Exercícios sobre triângulos. Disponível em: <https://www.todamateria.com.br/exercicios-sobre-triangulos-explicados/>. Acesso em: 6 jun. 2025.

TRIVIZOLI, Lucieli Maria. Descobrimo Pi: duas atividades baseadas nos trabalhos de Arquimedes. **BOCEHM**⁶, v. 4, n. 12, p. 6–13, 2018. Disponível em: <https://revistas.uece.br/index.php/BOCEHM/article/view/22>. Acesso em: 10 jun. 2025.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL. **Critérios de congruência.**

Disponível em:

https://www.ufrgs.br/espmat/disciplinas/geotri/moduloII/conteudos2_criterios1.html. Acesso em: 23 jul. 2025.

VIEIRA, William; IMAFUKU, Roberto Seidi; PEREIRA, Emanuel Fabiano Menezes. Uma análise da resolução de questões sobre o Teorema de Pitágoras. **ForScience**, Formiga, v. 7, n. 2, jul./dez. 2019.

<<https://educapes.capes.gov.br/bitstream/capes/553543/2/Express%C3%B5es%20alg%C3%A9bricas.pdf>>. Acesso em: 22 jun. 2025.

⁶ Boletim Cearense de Educação e História da Matemática.